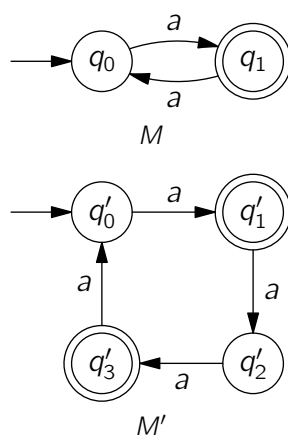


Hinweise:

- Die **Hausaufgaben** sollen in Gruppen von je 2 Studierenden aus dem gleichen Tutorium bearbeitet werden.
- Die Lösungen der Hausaufgaben müssen bis Mi., 19.05.2010 im Tutorium abgegeben werden. Alternativ ist es bis 17 Uhr möglich, diese in den Kasten im Flur des LuFG I2 einzuwerfen (Ahornstr. 55, E1, 2. Etage).
- Namen und Matrikelnummern der Studierenden sowie **die Nummer der Übungsgruppe** sind auf jedes Blatt der Abgabe zu schreiben. **Heften bzw. tackern Sie die Blätter!**
- Die **Tutoraufgaben** werden in den jeweiligen Tutorien gemeinsam besprochen und bearbeitet.

Tutoraufgabe 1 (Homomorphismen auf DFAs):

Betrachten Sie die beiden folgenden DFAs M und M' .



- Gibt es einen Homomorphismus von M nach M' ? Begründen Sie Ihre Antwort.
- Gibt es einen Homomorphismus von M' nach M ? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung:

- Nein. Der Zustand q_0 kann nicht gleichzeitig auf die Zustände q'_0 und q'_2 abgebildet werden. Ebenso kann q_1 nicht gleichzeitig auf q'_1 und q'_3 abgebildet werden. Letzteres ist allein schon nötig, um die erste Bedingung für einen Homomorphismus zu erfüllen, während die dritte Bedingung für einen Homomorphismus beide Abbildungen benötigen würde. Denn mit dem Wort aa erreicht man von q'_0 den Zustand q'_2 und umgekehrt, während man von q_0 aus wieder q_0 erreicht. Genauso verhält es sich bei den Zuständen q'_1 , q'_3 und q_1 .
- Ja. Die Funktion h mit $h(q'_0) = h(q'_2) = q_0$ und $h(q'_1) = h(q'_3) = q_1$ ist ein solcher Homomorphismus.

Hausaufgabe 2 (Homomorphismen auf DFAs):
(4 + 3 = 7 Punkte)

 Sei Σ ein Alphabet.

a) Beweisen Sie die folgende Aussage:

 Seien $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, $M' = (Q', \Sigma, \delta', q'_0, F')$ zwei beliebige DFAs und sei $h : Q \rightarrow Q'$ ein Homomorphismus von M nach M' . Dann gilt $L(M) = L(M')$.

 Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass für alle $w \in \Sigma^*$ gilt: $h(\hat{\delta}(q_0, w)) = \hat{\delta}'(h(q_0), w)$. Verwenden Sie hierzu Induktion über die Länge des Wortes w .

b) Geben Sie zwei DFAs M und M' über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$ an, die alle folgenden Eigenschaften erfüllen:

- $L(M) = L(M')$
- Es existiert kein Homomorphismus h von M nach M'
- Es existiert kein Homomorphismus h' von M' nach M
- M und M' haben jeweils maximal 4 Zustände

Lösung: _____

a) Da h ein Homomorphismus ist, gilt:

$$(1) \quad h(q) \in F' \Leftrightarrow q \in F$$

$$(2) \quad h(q_0) = q'_0$$

$$(3) \quad h(\delta(q, a)) = \delta'(h(q), a)$$

 Wir zeigen zunächst, dass $(\dagger) \quad h(\hat{\delta}(q_0, w)) = \hat{\delta}'(h(q_0), w)$ per Induktion über $|w|$.

 Im Induktionsanfang ist $w = \epsilon$ und $h(\hat{\delta}(q_0, \epsilon)) = h(q_0) \stackrel{(2)}{=} q'_0 = \hat{\delta}'(q'_0, \epsilon) \stackrel{(2)}{=} \hat{\delta}'(h(q_0), \epsilon)$.

 Als Induktionshypothese nehmen wir an, dass (\dagger) für $w' \in \Sigma^*$ gilt.

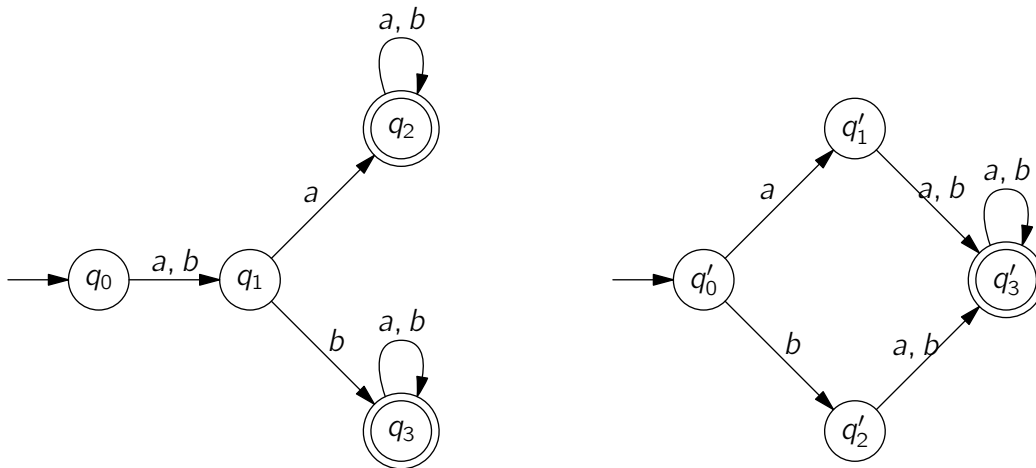
 Im Induktionsschritt ist nun $w = w'a$ mit $a \in \Sigma$. Es gilt $h(\hat{\delta}(q_0, w)) = h(\hat{\delta}(q_0, w'a)) = h(\delta(\hat{\delta}(q_0, w'), a)) \stackrel{(3)}{=} \delta'(h(\hat{\delta}(q_0, w')), a) \stackrel{(1)}{=} \delta'(\hat{\delta}'(h(q_0), w'), a) = \hat{\delta}'(h(q_0), w'a) = \hat{\delta}'(h(q_0), w)$.

Damit gilt:

$$\begin{aligned} L(M) = L(M') &\Leftrightarrow \forall w \in \Sigma^* : w \in L(M) \Leftrightarrow w \in L(M') \\ &\Leftrightarrow \forall w \in \Sigma^* : \hat{\delta}(q_0, w) \in F \Leftrightarrow \hat{\delta}'(q'_0, w) \in F' \\ &\stackrel{(2)}{\Leftrightarrow} \forall w \in \Sigma^* : \hat{\delta}(q_0, w) \in F \Leftrightarrow \hat{\delta}'(h(q_0), w) \in F' \\ &\stackrel{(\dagger)}{\Leftrightarrow} \forall w \in \Sigma^* : \hat{\delta}(q_0, w) \in F \Leftrightarrow h(\hat{\delta}(q_0, w)) \in F' \end{aligned}$$

 $\forall w \in \Sigma^* : \hat{\delta}(q_0, w) \in F \Leftrightarrow h(\hat{\delta}(q_0, w)) \in F'$ gilt wegen (1).

□



b)

Beide DFAs akzeptieren die Sprache $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid |w| \geq 2\}$. Der Zustand q_1 lässt sich nicht gleichzeitig auf q'_1 und q'_2 abbilden, während q'_3 nicht gleichzeitig auf q_2 und q_3 abgebildet werden kann. Ersteres ist nötig, da man von q'_0 aus mit a den Zustand q'_1 erreicht, während man mit b den Zustand q'_2 erreicht. Von q_0 aus erreicht man allerdings mit beiden Worten den Zustand q_1 . Letzteres ist nötig, da man von q_0 aus mit aa den Zustand q_2 erreicht, während man mit ab den Zustand q_3 erreicht. Von q'_0 aus erreicht man allerdings mit beiden Worten den Zustand q'_3 .

Tutoraufgabe 3 (Myhill-Nerode-Relation):

Bestimmen Sie für die folgenden Sprachen L_i über den Alphabeten Σ_i die Menge der Äquivalenzklassen Σ^*/\equiv_{L_i} . Geben Sie für die Sprachen L_i , für die diese Menge endlich ist, einen minimalen DFA an, der L_i erkennt. Geben Sie für die **anderen** Sprachen für alle Paare $[w]_{\equiv_{L_i}} \neq [w']_{\equiv_{L_i}}$ ein trennendes Wort u an, so dass $wu \in L_i$ und $w'u \notin L_i$ gilt.

a) Seien $\Sigma_1 := \{a, b\}^*$ und $L_1 := \{w \in \Sigma_1 \mid w \text{ enthält } ab \text{ oder } aa\}$

b) Sei $\Sigma_2 := \{0, 1\}^*$.

Wir führen die "Gewichtsfunktion" $weight : \{0, 1\}^* \rightarrow \mathbb{N}_0$ ein, die die Quersumme einer Binärzahl berechnet:

$$\begin{aligned}
 weight(\epsilon) &:= 0 \\
 weight(w \cdot a) &:= weight(w) + a & a \in \{0, 1\}, w \in \{0, 1\}^*
 \end{aligned}$$

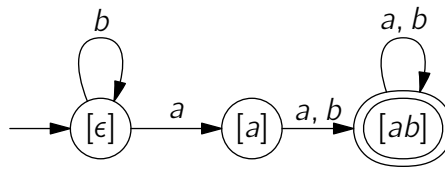
$$L_2 := \{w \in \Sigma_2^* \mid \exists k \in \mathbb{N}_0 : weight(w) = 2^k\}$$

c) Seien $\Sigma_3 := \{0, 1\}^*$ und $L_3 := \{w \in \Sigma_3^* \mid \exists n \in \mathbb{N}_0 : w = 1^n 01^n\}$

Lösung:

Wir verwenden im folgenden die Schreibweise $[w]$ statt $[w]_{\equiv_{L_i}}$ für ein $w \in \Sigma_i$, die Sprache L_i ist vom Kontext eindeutig festgelegt.

a) $\Sigma^*/\equiv_{L_1} = \{[\epsilon], [a], [ab]\}$



b) Die Äquivalenzklassen entsprechen jeweils den Mengen aller Wörter, die die gleiche Anzahl von 1en enthalten:

$$\Sigma^*/\equiv_{L_2} = \{ \{ w \in \{0, 1\}^* \mid \text{weight}(w) = k \} \mid k \in \mathbb{N}_0 \}$$

Seien nun $[w] \neq [w'] \in \Sigma^*/\equiv_{L_2}$. Wir setzen $m = \text{weight}(w)$ und $m' = \text{weight}(w')$. Nach Voraussetzung wissen wir, dass $m \neq m'$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit fordern wir $m < m'$ (dies kann durch Vertauschen von w, w' erreicht werden).

Wir wollen ein trennendes Wort u finden, so dass $w \cdot u \in L_2$ und $w' \cdot u \notin L_2$ gilt. Betrachten wir zuerst zwei Spezialfälle:

Fall $m = 0$ und $m' \neq 2^k - 1$ für ein $k \in \mathbb{N}_0$: Dann gilt für $u = 1$, dass $\tilde{w} \cdot 1 \in L_2 \forall \tilde{w} \in [w]$ und $\tilde{w}' \cdot 1 \notin L_2 \forall \tilde{w}' \in [w']$.

Fall $m = 0$ und $m' = 2^k - 1$ für ein $k \in \mathbb{N}_0$: Dann gilt für $u = 11$, dass $\tilde{w} \cdot 11 \in L_2 \forall \tilde{w} \in [w]$ und $\tilde{w}' \cdot 11 \notin L_2 \forall \tilde{w}' \in [w']$.

Wir betrachten nun die verbliebenen Fälle, d.h. $1 \leq m < m'$. Seien $l = \lceil \log_2(m) \rceil$ und $l' = \lceil \log_2(m') \rceil$, d.h. die kleinsten natürlichen Zahlen mit $2^{l-1} \leq m < 2^l$ und $2^{l'-1} \leq m' < 2^{l'}$. Aus $m < m'$ folgt hier insbesondere auch $l \leq l'$. Mit $\delta = 2^l - m$ (bzw. $\delta' = 2^{l'} - m'$) beschreiben wir nun also die Differenz zwischen m (bzw. m') und der nächstgrößeren Zweierpotenz 2^l (bzw. $2^{l'}$).

Im Fall $\delta \neq \delta'$ ist $u = 1^\delta$ ein trennendes Wort, da dann $^1 \text{weight}(\tilde{w} \cdot u) = m + \delta = 2^l$ und $\text{weight}(\tilde{w}' \cdot u) = m' + \delta' \neq 2^{l'}$ für alle $\tilde{w} \in [w], \tilde{w}' \in [w']$ ist. Da außerdem $l \leq l'$ gilt, wissen wir, dass $m' + \delta' < 2^{l'+1}$ gilt. Damit ist dann $\tilde{w} \cdot u \in L_2$ und $\tilde{w}' \cdot u \notin L_2$.

Im Fall $\delta = \delta'$ folgt direkt $l < l'$. Dann ist $u = 1^{\delta+2^l}$ ein trennendes Wort, da dann $\text{weight}(\tilde{w} \cdot u) = m + \delta + 2^l = 2^l + 2^l = 2^{l+1}$ und $\text{weight}(\tilde{w}' \cdot u) = m' + \delta + 2^l = 2^{l'} + 2^l < 2^{l'+1}$ folgt.

c)

$$C_3^n := \{1^n\}$$

$$C_3^{-k} := \{1^n 01^{n-k} \mid n \in \mathbb{N}_0\}$$

$$\Sigma^*/\equiv_{L_3} = \bigcup_{i \in \mathbb{N}_0} \{C_3^i, C_3^{-i}\} \cup \{ \{1^n 01^k \mid k > n\} \cup \{w0w'0w'' \mid w, w', w'' \in \Sigma^*\} \}$$

Hierbei entsprechen die Elemente von C_3^n den Wörtern, in denen bereits n mal die 1 gelesen wurde; die C_3^{-k} sind die Wörter, in denen noch k 1en "fehlen" und in der letzten Äquivalenzklasse liegen all die Wörter, die nicht Prefix eines Wortes der Sprache sind.

Seien nun $[w], [w']$ zwei Äquivalenzklassen mit $[w] \neq [w']$.

Fall $w = C_3^t$ für ein $t \in \mathbb{N}_0$: Mit $u = 01^t$ gilt $w \cdot u \in L$, aber nicht $w' \cdot u \in L$. Ist w' von der Form $1^{t'}$ mit $t' \neq t$, ist dies klar. Für alle anderen Fälle enthält $w' \cdot u$ mehr als einmal die 0 und kann daher nicht in der Sprache liegen.

Fall $w = C_3^{-t}$ für ein $t \in \mathbb{N}_0$: Mit $u = 1^t$ gilt $w \cdot u = 1^n 01^{n-t} \cdot 1^t = 1^n 01^n \in L$. Ist w' von der Form $1^{t'}$, enthält $w' \cdot u$ keine 0 und ist daher nicht in der Sprache. Ist w' von der Form $1^l 01^k$ mit $t \neq t' = l - k$, ist $w' \cdot u$ ebenfalls nicht in L . Ist w' eines der "ungültigen" Prefixe, gilt generell $w' \cdot u \notin L$.

¹An dieser Stelle sei bemerkt, dass weight ein Monoid-Homomorphismus von $(\{0, 1\}^*, \cdot)$ nach $(\mathbb{N}_0, +)$ ist.

Hausaufgabe 4 (Myhill-Nerode-Relation):

(2 + 3 + 2 = 7 Punkte)

Bestimmen Sie für die folgenden Sprachen L_i über den Alphabeten Σ_i die Menge der Äquivalenzklassen Σ^*/\equiv_{L_i} . Geben Sie für die Sprachen L_i , für die diese Menge endlich ist, einen minimalen DFA an, der L_i erkennt. Geben Sie für die **anderen** Sprachen für alle Paare $[w]_{\equiv_{L_i}} \neq [w']_{\equiv_{L_i}}$ ein trennendes Wort u an, so dass $wu \in L_i$ und $w'u \notin L_i$ gilt.

a) Seien $\Sigma_4 := \{a, b\}$ und $L_4 := \{w \in \Sigma_4^* \mid w \text{ enthält } aba \text{ oder } abba\}$

b) Seien $\Sigma_5 := \{0, 1, \dots, 9\}$ und $L_5 := \{w \in \Sigma_5^* \mid w \text{ durch } 3 \text{ teilbare Dezimalzahl}\} = \{0, 3, 6, 9, 12, \dots\}$

Dabei sind Dezimalzahlen all die Ziffernfolgen, die entweder die 0 sind oder nicht mit 0 beginnen.

Hinweis: Um herauszufinden, ob eine Dezimalzahl z durch 3 teilbar ist, kann man die Quersumme q der Zahl bilden und stattdessen überprüfen, ob q durch 3 teilbar ist. Genau dann, wenn dies der Fall ist, ist auch z durch 3 teilbar.

c) Sei $\Sigma_6 := \{0, 1\}$.

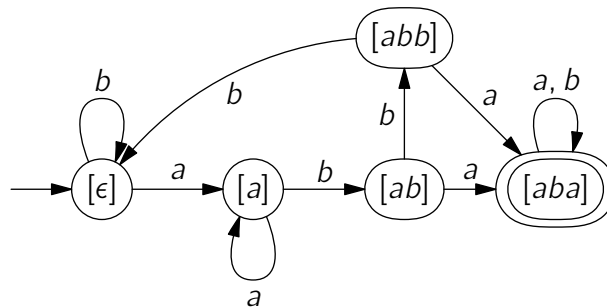
Wir erinnern an $dup : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$ aus Turaufgabe 1 von Übungsblatt 3:

$$\begin{aligned}
 dup(\epsilon) &:= \epsilon \\
 dup(w \cdot a) &:= dup(w) \cdot a \cdot a && a \in \Sigma, w \in \Sigma^*
 \end{aligned}$$

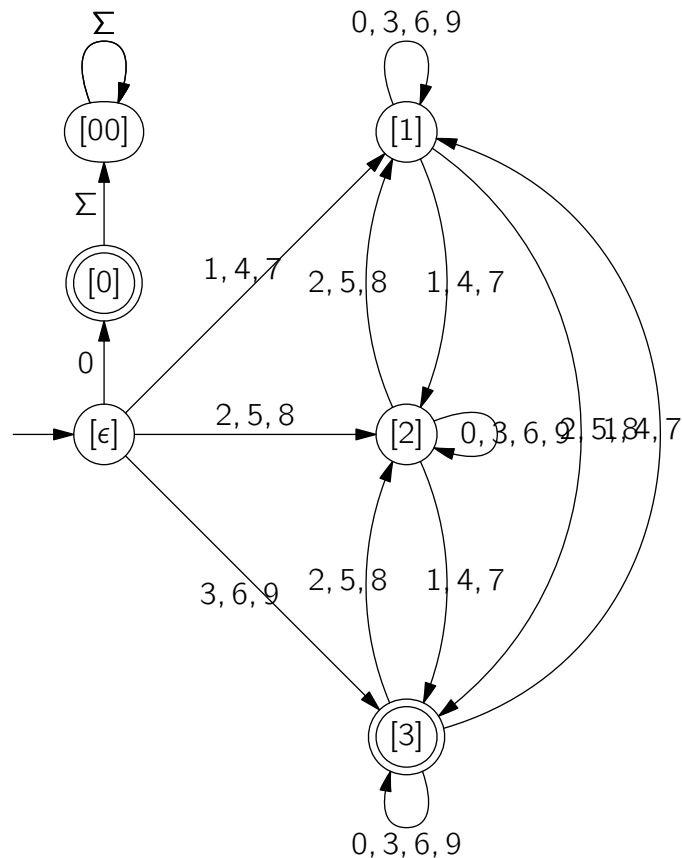
$$L_6 := \{w \in \Sigma_6^* \mid \exists w' \in \{1\}^* : w = w' \cdot 0 \cdot dup(w')\}$$

Lösung: _____

a) $\Sigma^*/\equiv_{L_4} = \{[\epsilon], [a], [ab], [abb], [aba]\}$



b) $\Sigma^*/\equiv_{L_5} = \{[\epsilon], [0], [00], [1], [2], [3]\}$



c) Wir können auch eine alternative Schreibweise für L_6 angeben:

$$L_6 = \{w \in \{1, 0\}^* \mid \exists n \in \mathbb{N}_0 : w = 1^n 01^{2n}\}$$

Damit können wir analog zur Tutoraufgabe 3(c) die folgenden Äquivalenzklassen benennen:

$$\begin{aligned}
 C_6^n &:= \{1^n\} \\
 C_6^{-k} &:= \{1^n 01^{2n-k} \mid n \in \mathbb{N}_0\} \\
 \Sigma^* / \equiv_{L_6} &= \bigcup_{i \in \mathbb{N}_0} \{C_6^i, C_6^{-i}\} \cup \{1^n 01^k \mid k > 2n\} \cup \{w0w'0w'' \mid w, w', w'' \in \Sigma^*\}
 \end{aligned}$$

Hierbei entsprechen die Elemente von C_6^n den Wörtern, in denen bereits n mal die 1 gelesen wurde; die C_6^{-k} sind die Wörter, in denen noch k 1en "fehlen" und in der letzten Äquivalenzklasse liegen all die Wörter, die nicht Prefix eines Wortes der Sprache sind.

Seien nun $[w], [w']$ zwei Äquivalenzklassen mit $[w] \neq [w']$.

Fall $w = C_6^t$ für ein $t \in \mathbb{N}_0$: Mit $u = 01^{2t}$ gilt $w \cdot u \in L_6$, aber nicht $w' \cdot u \in L_6$. Ist w' von der Form $1^{t'}$ mit $t' \neq t$, ist dies klar. Für alle anderen Fälle enthält $w' \cdot u$ mehr als einmal die 0 und kann daher nicht in der Sprache liegen.

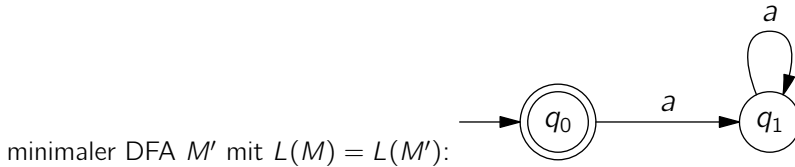
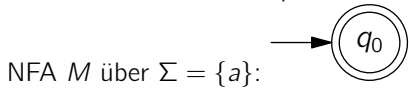
Fall $w = C_6^{-t}$ für ein $t \in \mathbb{N}_0$: Mit $u = 1^t$ gilt $w \cdot u = 1^n 01^{2n-t} \cdot 1^t = 1^n 01^{2n} \in L_6$. Ist w' von der Form $1^{t'}$, enthält $w' \cdot u$ keine 0 und ist daher nicht in der Sprache. Ist w' von der Form $1^l 01^k$ mit $t \neq t' = 2l - k$, ist $w' \cdot u$ ebenfalls nicht in L_6 . Ist w' eines der "ungültigen" Prefixe, gilt generell $w' \cdot u \notin L_6$.

Tutoraufgabe 5 (Sprach-Index):

Kann es einen NFA $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ geben, bei dem $|Q|$ kleiner ist als der Index von $\equiv_{L(M)}$?

Lösung: _____

Ja! Es reicht, einen entsprechenden NFA und den passenden minimalen DFA anzugeben:



Hausaufgabe 6 (Größenabschätzung für Automaten):

(3 Punkte)

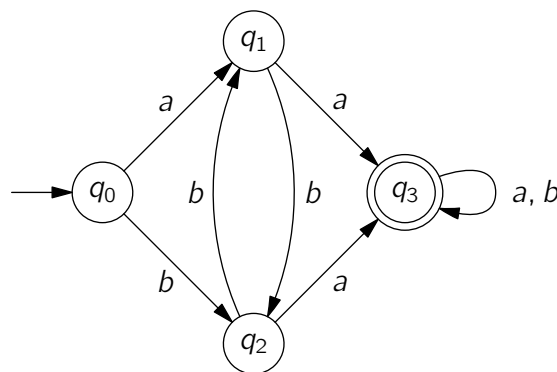
Sei $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ ein NFA mit $|Q| = 16$ Zuständen. Kann ein Automat $M' = (Q', \Sigma, \delta', q'_0, F')$ existieren, der ein minimaler DFA mit $|Q'| = 76543$ und $L(M) = L(M')$ ist? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung: _____

Nein. Durch die Potenzmengenkonstruktion für M erzeugt man einen DFA M'' mit $L(M) = L(M'')$. Die Konstruktion erzeugt dabei maximal einen Zustand pro Menge von Zuständen aus Q . Es gibt daher maximal $2^{|Q|} = |\mathcal{P}(Q)| = 2^{16} = 65536$ Zustände in M'' . Da $L(M') = L(M) = L(M'')$ gilt und der DFA M'' weniger Zustände als M' hat, kann M' kein minimaler DFA für $L(M)$ sein.

Tutoraufgabe 7 (Vergleich \sim und \equiv_L):

Der folgende Automat erkennt die Sprache L . Geben Sie zwei Wörter $u, v \in \{a, b\}^*$ an, für die $u \equiv_L v$ und $u \not\sim v$ gilt. Hierbei bedeutet $u \sim v \Leftrightarrow \hat{\delta}(q_0, u) = \hat{\delta}(q_0, v)$. Geben Sie ausserdem $[u]_{\sim}$, $[v]_{\sim}$, $[u]_{\equiv_L}$ und $[v]_{\equiv_L}$ in Form von regulären Ausdrücken an.



Lösung: _____

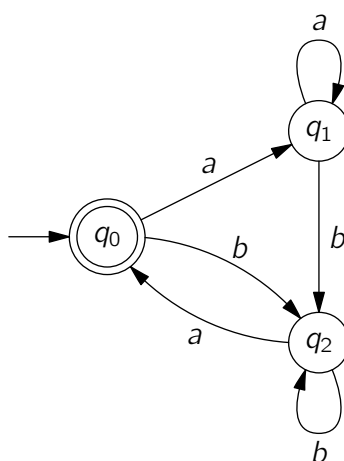
Wir wählen $u = a$ und $v = b$. Aus der Definition von \sim ergibt sich $[w]_{\sim} = \{ w' \mid \hat{\delta}(q_0, w') = \hat{\delta}(q_0, w) \}$. Es folgt somit $[a]_{\sim} = (a + bb)(bb)^*$ und $[b]_{\sim} = (ab + b)(bb)^*$.

Die Äquivalenzklassen von \equiv_L beschreiben die Wörter, die durch Anhängen von Suffixen bezüglich der Sprache L nicht unterschieden werden können. Es gilt $[a]_{\equiv_L} = (a + b)b^* = [b]_{\equiv_L}$.

Hausaufgabe 8 (Minimalität):

(3 Punkte)

Beweisen Sie, dass folgender DFA minimal ist. Verwenden Sie hierzu den Satz von Myhill-Nerode.



Lösung: _____

Da der Automat 3 Zustände besitzt, kann die Nerode-Kongruenz der von ihm erkannten Sprache höchstens 3 Äquivalenzklassen besitzen. Wir betrachten die Äquivalenzklassen von \sim , die nach Lemma 2.6.2 eine Verfeinerung der Klassen von \equiv_L darstellen.

- $[\epsilon]_{\sim} = \{ w \in \{a, b\}^* \mid \hat{\delta}(q_0, w) = q_0 \}$
- $[a]_{\sim} = \{ w \in \{a, b\}^* \mid \hat{\delta}(q_0, w) = q_1 \}$
- $[b]_{\sim} = \{ w \in \{a, b\}^* \mid \hat{\delta}(q_0, w) = q_2 \}$

Es bleibt zu zeigen, dass diese Klassen keine echte Verfeinerung bezüglich \equiv_L sind. Dafür geben wir für aus je zwei Klassen Elemente an, die sich bezüglich \equiv_L unterscheiden.

- Für $[\epsilon]_{\sim}$ und $[a]_{\sim}$: $\epsilon \in L$, aber $a \notin L$,
- für $[a]_{\sim}$ und $[b]_{\sim}$: $aa \notin L$, aber $ba \in L$ und
- für $[b]_{\sim}$ und $[\epsilon]_{\sim}$: $b\epsilon \notin L$, aber $\epsilon \in L$.

Somit hat ein minimaler Automat, der die Sprache L erkennt mindestens 3 Zustände.

Tutoraufgabe 9 (Myhill-Nerode-DFA und Äquivalenzklassen):

Sei $[\epsilon]_{\equiv_L} \cap L = \emptyset$. Zeigen Sie, dass der Startzustand im Myhill-Nerode-DFA zu L kein Endzustand ist ($q_0 \notin F$).

Lösung: _____

Aus der Konstruktion des Myhill-Nerode-DFA folgt, dass $[\epsilon]_{\equiv_L}$ der Startzustand des Automaten ist. Es gilt offensichtlich, dass $\epsilon \in [\epsilon]_{\equiv_L}$ enthalten ist. Mit $[\epsilon]_{\equiv_L} \cap L = \emptyset$ folgt $\epsilon \notin L$. Der im Automaten für ϵ erreichte Zustand ist der Startzustand und darf also kein Endzustand sein.

Hausaufgabe 10 (Abschätzung von \equiv_L):

(4 Punkte)

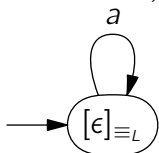
Sei L eine reguläre Sprache. Für diese Sprache ist $[\epsilon]_{\equiv_L} \cap L = \emptyset$ bekannt (also kein Wort aus dieser Äquivalenzklasse ist in der Sprache L enthalten). Weiterhin gilt $[\epsilon]_{\equiv_L} = [a]_{\equiv_L}$. Zudem ist $[ab]_{\equiv_L} \subseteq L$ bekannt (also alle Wörter in dieser Äquivalenzklasse sind auch in der Sprache L enthalten). Welche der folgenden Aussagen sind korrekt? Begründen Sie Ihre Antworten.

Hinweis: Versuchen Sie, den Myhill-Nerode-DFA für L so weit wie möglich zu konstruieren!

1. $L = \emptyset$
2. $[aaaa]_{\equiv_L} \cap L = \emptyset$
3. $[aaaa]_{\equiv_L} \subseteq L$
4. $b \equiv_L ab$

Lösung: _____

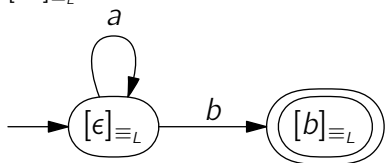
1. Falsch. Offensichtlich gilt $ab \in [ab]_{\equiv_L}$, also $[ab]_{\equiv_L} \neq \emptyset$. Allgemein kann keine Äquivalenzklasse $[w]_{\equiv_L}$ leer sein, da jeweils der Repräsentant w enthalten ist. Mit $[ab]_{\equiv_L} \subseteq L$ folgt $ab \in L$. Die erste Aussage ist also falsch.
2. Wahr. Aus $[\epsilon]_{\equiv_L} \cap L = \emptyset$ folgt, dass der Startzustand des Myhill-Nerode-DFA kein Endzustand ist. Aus $\epsilon \in [\epsilon]_{\equiv_L}$ und $\epsilon \cdot a = a \in [a]_{\equiv_L} = [\epsilon]_{\equiv_L}$ folgt, dass es eine a -Schleife für den $[\epsilon]_{\equiv_L}$ -Zustand (also dem Startzustand) geben muss. Bisher ergibt sich also folgender Myhill-Nerode-DFA:



An diesem einen Zustand kann man schon ablesen, dass die Wörter $\epsilon, a, aa, aaa, aaaa, \dots$ sowohl in der gleichen Äquivalenzklasse liegen als auch nicht in der Sprache L enthalten sind. Die zweite Aussage ist also wahr.

3. Falsch. Da $aaaa \in [aaaa]_{\equiv_L}$ gilt, ist $[aaaa]_{\equiv_L}$ also nicht leer. Aus der zweiten Aussage folgt dann, dass die dritte Aussage falsch ist.

4. Wahr. Da $[\epsilon]_{\equiv_L} = [a]_{\equiv_L} \cap L = \emptyset$ und $[ab]_{\equiv_L} \subseteq L$ gelten, folgt $[\epsilon]_{\equiv_L} \neq [ab]_{\equiv_L}$. Im Myhill-Nerode-DFA existiert also ein Zustand zu $[ab]_{\equiv_L}$, welcher b -Nachfolger vom Zustand für $[a]_{\equiv_L} = [\epsilon]_{\equiv_L}$ ist. Dieser Zustand für $[ab]_{\equiv_L}$ muss ein Endzustand sein, da $[ab]_{\equiv_L} \subseteq L$ gilt.



Am bisher konstruierten Automaten kann man ablesen, dass $[b]_{\equiv_L} = [ab]_{\equiv_L}$ gelten muss, also auch $b \equiv ab$.
