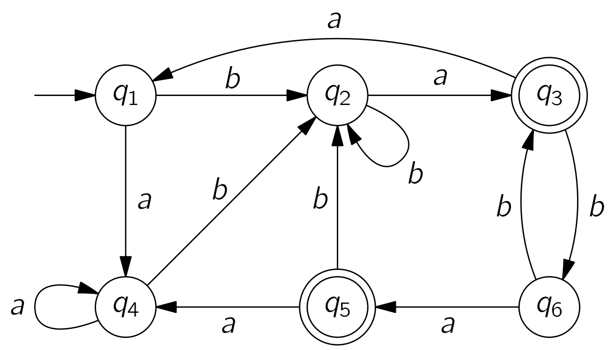
Prof. Dr. J. Giesl M. Brockschmidt, F. Emmes, C. Fuhs, C. Otto, T. Ströder

Hinweise:

- Die **Hausaufgaben** sollen in Gruppen von je 2 Studierenden aus dem gleichen Tutorium bearbeitet werden.
- Sie können die Lösungen zu diesem Aufgabenblatt bei der Präsenzübung am Di., 01.06.2010 abgeben. Alternativ ist es bis Mi., 02.06.2010 17 Uhr möglich, diese in den Kasten im Flur des LuFG I2 einzuwerfen (Ahornstr. 55, E1, 2. Etage).
- Namen und Matrikelnummern der Studierenden sowie **die Nummer der Übungsgruppe** sind auf jedes Blatt der Abgabe zu schreiben. **Heften bzw. tackern Sie die Blätter**!
- Die **Tutoraufgaben** 1, 3 und 7 werden in den jeweiligen Tutorien gemeinsam besprochen und bearbeitet. Die **Tutoraufgabe** 5 zum Pumping Lemma wird in der Globalübung am 21.05.2010 besprochen.
- **Bitte melden Sie sich bis zum 21.05.2010 im Übungssystem für die Präsenzübung an!**
- **Am Mi., 02.06.2010 werden keine Tutorien stattfinden.**

Tutoraufgabe 1 (DFA Minimierung):

Verwenden Sie den schnellen Markierungsalgorithmus aus der Vorlesung um folgenden DFA zu minimieren. Geben Sie in der Lösung die beim Anwenden des Algorithmus entstehende Tabelle und den minimalen Automaten an.



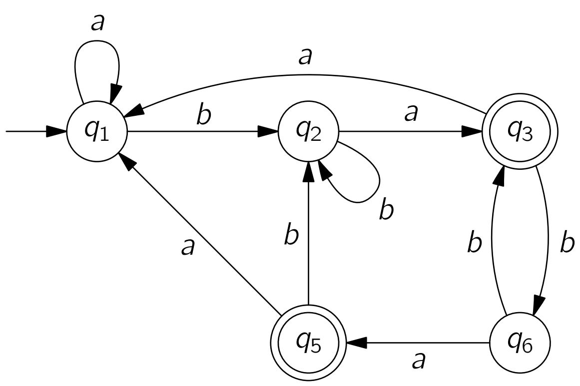
Lösung:

2	$\times_1$				
3	$\times_0$	$\times_0$			
4	$(3,5)$	$\times_3$	$\times_0$		
5	$\times_0$	$\times_0$	$(2,6)$, $\times_6$	$\times_0$	
6	$\times_5$	$(3,5)$, $\times_6$	$\times_0$	$\times_7$	$\times_0$
	1	2	3	4	5

In einem ersten Schritt markieren wir mit $\times_0$ all die Zellen, die Paaren von Zuständen $\{p, q\}$ entsprechen, für die $p \in F$ und $q \notin F$ gilt.
Nun durchlaufen wir alle Paare $\{p, q\}$ von Zuständen, indem wir die Tabelle von oben nach unten und von links nach rechts durchlaufen. Dabei überprüfen wir jeweils, ob $\delta(p, a)$ und $\delta(q, a)$ bereits unterscheidbar sind. Ist dies der Fall, fügen wir ein $\times_i$ ein, ansonsten markieren wir in der Zelle für das Paar $\{\delta(p, a), \delta(q, a)\}$, dass $\{p, q\}$ dann unterscheidbar sind, wenn $\{\delta(p, a), \delta(q, a)\}$ unterscheidbar sind:

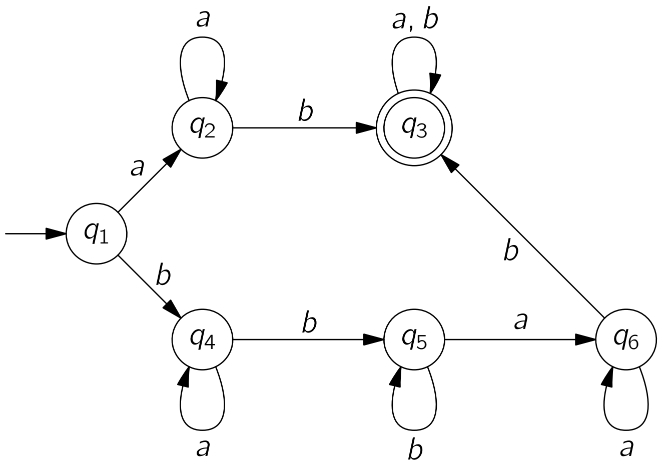
1. Paar $\{q_1, q_2\}$:
   a $\delta(q_1, a) = q_4$, $\delta(q_2, a) = q_3$, $\{q_2, q_3\}$ unterscheidbar $\Rightarrow$ Füge $\times_1$ in Zelle $\{q_1, q_2\}$ ein.
2. Paar $\{q_1, q_4\}$:
   a $\delta(q_1, a) = q_4$, $\delta(q_4, a) = q_4$, $\{q_4, q_4\}$ nicht unterscheidbar.
   b $\delta(q_1, b) = q_2$, $\delta(q_4, b) = q_2$, $\{q_2, q_2\}$ nicht unterscheidbar.
3. Paar $\{q_2, q_4\}$:
   a $\delta(q_2, a) = q_3$, $\delta(q_4, a) = q_4$, $\{q_3, q_4\}$ unterscheidbar $\Rightarrow$ Füge $\times_3$ in Zelle $\{q_2, q_4\}$ ein.
4. Paar $\{q_3, q_5\}$:
   a $\delta(q_3, a) = q_1$, $\delta(q_5, a) = q_4$, $\{q_1, q_4\}$ nicht unterscheidbar. $\Rightarrow$ Füge $(3, 5)$ in Zelle $\{q_1, q_4\}$ ein.
   b $\delta(q_3, b) = q_6$, $\delta(q_5, b) = q_2$, $\{q_2, q_6\}$ noch nicht unterscheidbar $\Rightarrow$ Füge $(3, 5)$ in Zelle $\{q_2, q_6\}$ ein.
5. Paar $\{q_1, q_6\}$:
   a $\delta(q_1, a) = q_4$, $\delta(q_6, a) = q_5$, $\{q_1, q_5\}$ unterscheidbar $\Rightarrow$ Füge $\times_5$ in Zelle $\{q_1, q_6\}$ ein.
6. Paar $\{q_2, q_6\}$:
   a $\delta(q_2, a) = q_3$, $\delta(q_6, a) = q_5$, $\{q_3, q_5\}$ noch nicht unterscheidbar $\Rightarrow$ Füge $(2, 6)$ in Zelle $\{q_3, q_5\}$ ein.
   b $\delta(q_2, b) = q_2$, $\delta(q_6, b) = q_3$, $\{q_2, q_3\}$ unterscheidbar $\Rightarrow$ Füge $\times_6$ in Zelle $\{q_2, q_6\}$ ein. Folge Verweis auf $\{q_3, q_5\}$ und füge dort ebenfalls $\times_6$ ein.
7. Paar $\{q_4, q_6\}$:
   a $\delta(q_4, a) = q_4$, $\delta(q_6, a) = q_5$, $\{q_4, q_5\}$ unterscheidbar $\Rightarrow$ Füge $\times_7$ in Zelle $\{q_4, q_6\}$ ein.

Insgesamt können wir also schließen, dass nur die Zustände q_1 und q_4 verschmolzen werden können. Es ergibt sich der folgende minimale Automat:



Hausaufgabe 2 (DFA Minimierung): (4 Punkte)

Verwenden Sie den schnellen Markierungsalgorithmus aus der Vorlesung, um folgenden DFA zu minimieren. Geben Sie in der Lösung die beim Anwenden des Algorithmus entstehende Tabelle und den minimalen Automaten an.



Lösung:

2	$\times_1$				
3	$\times_0$	$\times_0$			
4	$\times_3$	$(1,4)$, $\times_3$	$\times_0$		
5	$\times_9$	$\times_5$	$\times_0$	$(1,4)$, $(1,5)$, $\times_9$	
6	$\times_7$	$(1,5)$, $(2,5)$, $(1,6)$	$\times_0$	$(4,5)$, $\times_9$	$\times_{10}$
	1	2	3	4	5

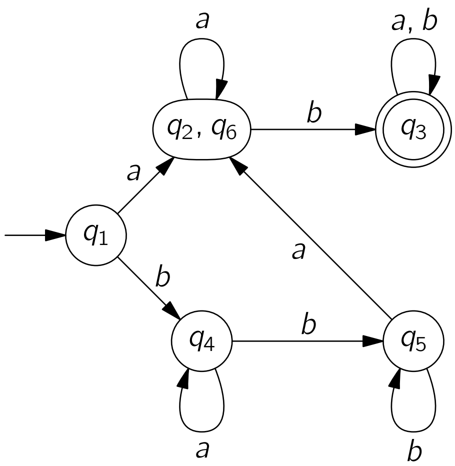
In einem ersten Schritt markieren wir mit $\times_0$ all die Zellen, die Paaren von Zuständen $\{p, q\}$ entsprechen, für die $p \in F$ und $q \notin F$ gilt.
Nun durchlaufen wir alle Paare $\{p, q\}$ von Zuständen, indem wir die Tabelle von oben nach unten und von links nach rechts durchlaufen. Dabei überprüfen wir jeweils, ob $\delta(p, a)$ und $\delta(q, a)$ bereits unterscheidbar sind. Ist dies der Fall, fügen wir ein $\times_i$ ein, ansonsten markieren wir in der Zelle für das Paar $\{\delta(p, a), \delta(q, a)\}$, dass $\{p, q\}$ dann unterscheidbar sind, wenn $\{\delta(p, a), \delta(q, a)\}$ unterscheidbar sind:

1. Paar $\{q_1, q_2\}$:
   - *a* $\delta(q_1, a) = q_2$, $\delta(q_2, a) = q_2$, $\{q_2, q_2\}$ nicht unterscheidbar.
   - *b* $\delta(q_1, b) = q_4$, $\delta(q_2, b) = q_3$, $\{q_3, q_4\}$ unterscheidbar $\Rightarrow$ Füge $\times_1$ in Zelle $\{q_1, q_2\}$ ein.
2. Paar $\{q_1, q_4\}$:
   - *a* $\delta(q_1, a) = q_2$, $\delta(q_4, a) = q_4$, $\{q_2, q_4\}$ noch nicht unterscheidbar $\Rightarrow$ Füge $(1, 4)$ in Zelle $\{q_2, q_4\}$ ein.
   - *b* $\delta(q_1, b) = q_4$, $\delta(q_4, b) = q_5$, $\{q_4, q_5\}$ noch nicht unterscheidbar $\Rightarrow$ Füge $(1, 4)$ in Zelle $\{q_4, q_5\}$ ein.
3. Paar $\{q_2, q_4\}$:
   - *a* $\delta(q_2, a) = q_2$, $\delta(q_4, a) = q_4$, $\{q_2, q_4\}$ noch nicht unterscheidbar.
   - *b* $\delta(q_2, b) = q_3$, $\delta(q_4, b) = q_5$, $\{q_3, q_5\}$ unterscheidbar $\Rightarrow$ Füge $\times_3$ in Zelle $\{q_2, q_4\}$ ein. Folge Verweis auf $\{q_1, q_4\}$ und füge dort ebenfalls $\times_3$ ein.
4. Paar $\{q_1, q_5\}$:
   - *a* $\delta(q_1, a) = q_2$, $\delta(q_5, a) = q_6$, $\{q_2, q_6\}$ noch nicht unterscheidbar $\Rightarrow$ Füge $(1, 5)$ in Zelle $\{q_2, q_6\}$ ein.
   - *b* $\delta(q_1, b) = q_4$, $\delta(q_5, b) = q_5$, $\{q_4, q_5\}$ noch nicht unterscheidbar $\Rightarrow$ Füge $(1, 5)$ in Zelle $\{q_4, q_5\}$ ein.
5. Paar $\{q_2, q_5\}$:
   - *a* $\delta(q_2, a) = q_2$, $\delta(q_5, a) = q_6$, $\{q_2, q_6\}$ noch nicht unterscheidbar $\Rightarrow$ Füge $(2, 5)$ in Zelle $\{q_2, q_6\}$ ein.

b $\delta(q_2, b) = q_3$, $\delta(q_5, b) = q_5$, $\{q_3, q_5\}$ unterscheidbar $\Rightarrow$ Füge $\times_5$ in Zelle $\{q_2, q_5\}$ ein.

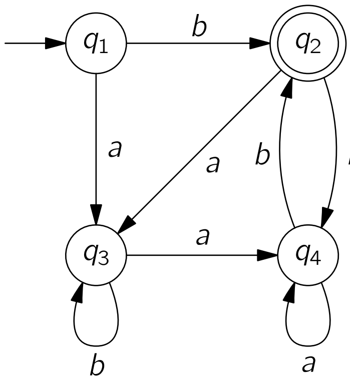
6. Paar $\{q_4, q_5\}$:
   a $\delta(q_4, a) = q_4$, $\delta(q_5, a) = q_6$, $\{q_4, q_6\}$ noch nicht unterscheidbar $\Rightarrow$ Füge $(4, 5)$ in Zelle $\{q_4, q_6\}$ ein.
   b $\delta(q_4, b) = q_5$, $\delta(q_5, b) = q_5$, $\{q_5, q_5\}$ nicht unterscheidbar.
7. Paar $\{q_1, q_6\}$:
   a $\delta(q_1, a) = q_2$, $\delta(q_6, a) = q_6$, $\{q_2, q_6\}$ noch nicht unterscheidbar $\Rightarrow$ Füge $(1, 6)$ in Zelle $\{q_2, q_6\}$ ein.
   b $\delta(q_1, b) = q_4$, $\delta(q_6, b) = q_3$, $\{q_4, q_3\}$ unterscheidbar $\Rightarrow$ Füge $\times_7$ in Zelle $\{q_1, q_6\}$ ein.
8. Paar $\{q_2, q_6\}$:
   a $\delta(q_2, a) = q_2$, $\delta(q_6, a) = q_6$, $\{q_2, q_6\}$ noch nicht unterscheidbar.
   b $\delta(q_2, b) = q_3$, $\delta(q_6, b) = q_3$, $\{q_3, q_3\}$ nicht unterscheidbar.
9. Paar $\{q_4, q_6\}$:
   a $\delta(q_4, a) = q_4$, $\delta(q_6, a) = q_6$, $\{q_4, q_6\}$ noch nicht unterscheidbar.
   b $\delta(q_4, b) = q_5$, $\delta(q_6, b) = q_3$, $\{q_3, q_5\}$ unterscheidbar $\Rightarrow$ Füge $\times_9$ in Zelle $\{q_4, q_6\}$ ein. Folge Verweis auf $\{q_4, q_5\}$ und füge dort ebenfalls $\times_9$ ein. Folge Verweisen auf $\{q_1, q_4\}$ und $\{q_1, q_5\}$ und füge dort ebenfalls $\times_9$ ein (wenn noch kein $\times$ vorhanden).
10. Paar $\{q_5, q_6\}$:
   a $\delta(q_5, a) = q_6$, $\delta(q_6, a) = q_6$, $\{q_6, q_6\}$ nicht unterscheidbar.
   b $\delta(q_5, b) = q_5$, $\delta(q_6, b) = q_3$, $\{q_3, q_5\}$ unterscheidbar $\Rightarrow$ Füge $\times_{10}$ in Zelle $\{q_5, q_6\}$ ein.

Insgesamt können wir also schließen, dass nur die Zustände q_2 und q_6 verschmolzen werden können. Es ergibt sich der folgende minimale Automat:



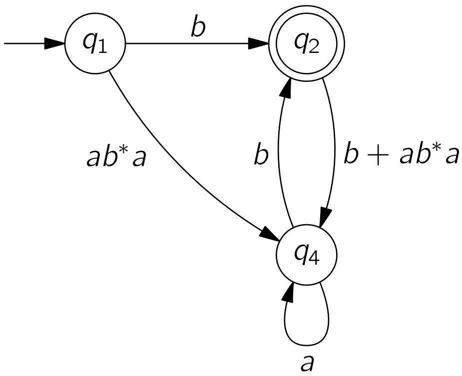
Tutoraufgabe 3 (DFA in regulären Ausdruck umwandeln):

Wandeln Sie folgenden DFA in einen regulären Ausdruck um, indem Sie Zustände schrittweise entfernen und die betroffenen Kanten durch reguläre Ausdrücke ersetzen. Geben Sie nach jedem Schritt den resultierenden Automaten und zum Schluss den abgelesenen regulären Ausdruck an.

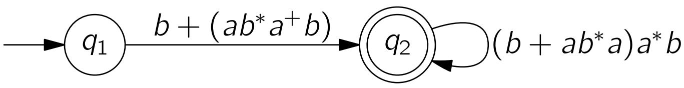


Lösung:

Im ersten Schritt wird der Zustand q_3 entfernt.



Im resultierenden Automaten wird nun der Zustand q_4 entfernt.

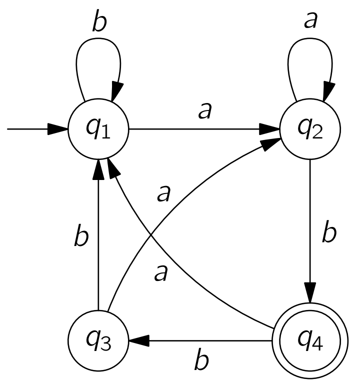


Nun läßt sich das Ergebnis ablesen:

$$(b + (ab^* a^+ b))((b + ab^* a)a^* b)^*$$

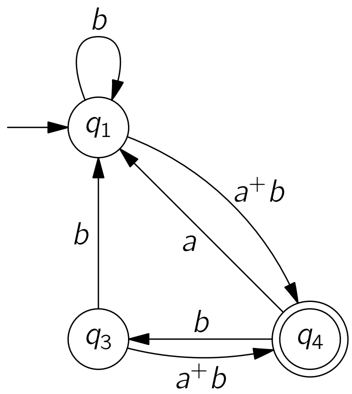
Hausaufgabe 4 (DFA in regulären Ausdruck umwandeln): (4 Punkte)

Wandeln Sie folgenden DFA in einen regulären Ausdruck um, indem Sie Zustände schrittweise entfernen und die betroffenen Kanten durch reguläre Ausdrücke ersetzen. Geben Sie nach jedem Schritt den resultierenden Automaten und zum Schluss den abgelesenen regulären Ausdruck an.

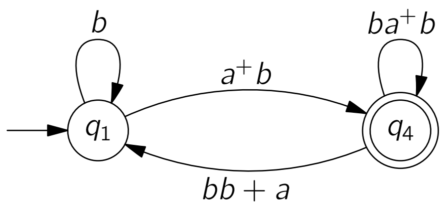


Lösung:

Im ersten Schritt entfernen wir den Zustand q_2.



Nach Entfernen von q_3 ergibt sich folgender Automat:



Der resultierende Ausdruck ist:

$$b^* a^+ b(ba^+ b + (bb + a)b^* a^+ b)^*$$

Tutoraufgabe 5 (Pumping Lemma):

Weisen Sie mit Hilfe des Pumping Lemmas nach, dass die folgenden Sprachen nicht regulär sind:

a) $L_1 := \{0^k 1^{2k} \mid k \in \mathbb{N}_0\}$ über dem Alphabet $\{0, 1\}$.

b) $L_2 := \{a^{k^2} \mid k \in \mathbb{N}_0\}$ über dem Alphabet $\{a\}$.

c) Wir erinnern an die Funktion $\mathit{weight} : \{0,1\}^* \to \mathbb{N}_0$ aus Tutoraufgabe 3(b) auf Übungsblatt 4:

$$\begin{aligned} \mathit{weight}(\epsilon) &:= 0 \\ \mathit{weight}(w \cdot a) &:= \mathit{weight}(w) + a \qquad\qquad a \in \{0,1\}, w \in \{0,1\}^* \end{aligned}$$

$L_3 := \{w \in \{0,1\}^* \mid \exists k \in \mathbb{N}_0 : \mathit{weight}(w) = 2^k\}$ über dem Alphabet $\{0,1\}$.

d) $L_4 := \{w \in \{0,1\}^* \mid w$ enthält gleich viele 0en und 1en$\}$ über dem Alphabet $\{0,1\}$.

Lösung:

Alle folgenden Lösungen sind nach demselben Schema aufgebaut. Wir nehmen jeweils an, dass die Sprache L_j regulär ist. Dann muss es nach dem Pumping Lemma eine Länge $n \in \mathbb{N}_{>0}$ geben, so dass es für jedes Wort $w \in L_j$ mit $|w| \geq n$ eine Zerlegung $w = xyz$ gibt, so dass $|xy| \leq n$, $y \neq \epsilon$ und $xy^iz \in L_j$ für alle $i \in \mathbb{N}_0$ gilt. Wenn wir für jede solche Zerlegung ein i angeben können, so dass $xy^iz \notin L_j$ gilt, muss die Annahme, dass L_j regulär ist, falsch sein.

a) Wir wählen das Wort $w = 0^n1^{2n} \in L_1$. Nach Pumping Lemma muss es also eine Zerlegung xyz von w geben, so dass $xy^iz \in L_1$ für alle $i \in \mathbb{N}_0$. Da $|xy| \leq n$ gelten muss, gibt es ein $\ell \in \mathbb{N}_0$ mit $\ell \leq n$, so dass $y = 0^\ell$ ist.

Es muss auch $xy^0z = xz = 0^{n-\ell}1^{2n} \in L_1$ gelten. Da aber $y \neq \epsilon$ gelten muss, ist $\ell > 0$ und daher $0^{n-\ell}1^{2n} \notin L_1$. Dies ist ein Widerspruch zur Annahme und wir können schließen, dass L_1 nicht regulär ist.

b) Wir wählen das Wort $w = a^{n^2} \in L_2$. Nach Pumping Lemma muss es also eine Zerlegung xyz von w geben, so dass $xy^iz \in L_2$ für alle $i \in \mathbb{N}_0$. Sei $y = a^\ell$ für ein $\ell \in \mathbb{N}_0$ mit $1 \leq \ell \leq n$.

Es muss auch $xy^2z = a^{n^2+\ell} \in L_2$ gelten. Da aber $y \neq \epsilon$ gelten muss, ist $\ell > 0$ und daher $n^2 + \ell > n^2$. Außerdem gilt $\ell \leq n$ (da $|xy| \leq n$), also auch $n^2 + \ell < n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$. Damit gilt $xy^2z \notin L_2$, was ein Widerspruch zur Annahme ist. Wir können daher schließen, dass L_2 nicht regulär ist.

c) Wir wählen das Wort $w = 1^{2^n} \in L_3$. Nach Pumping Lemma muss es also eine Zerlegung xyz von w geben, so dass $xy^iz \in L_3$ für alle $i \in \mathbb{N}_0$. Sei $y = 1^\ell$ für ein $\ell \in \mathbb{N}_0$ mit $1 \leq \ell \leq n$.

Es muss auch $xy^2z = 1^{2^n+\ell} \in L_3$ gelten. Da aber $y \neq \epsilon$ gelten muss, ist $\ell > 0$ und daher $2^n + \ell > 2^n$. Außerdem muss $|xy| \leq n$ gelten. Da $n > 0$ gilt, impliziert das $2^n + \ell \leq 2^n + n < 2^{n+1}$. Daher ist $|xy^2z|$ keine Zweierpotenz und damit gilt $xy^2z \notin L_3$. Dies ist ein Widerspruch zur Annahme und wir können schließen, dass L_3 nicht regulär ist.

d) Wir wählen das Wort $w = 0^n1^n \in L_4$. Nach Pumping Lemma muss es also eine Zerlegung xyz von w geben, so dass $xy^iz \in L_4$ für alle $i \in \mathbb{N}_0$. Sei $y = 0^\ell$ für ein $\ell \in \mathbb{N}_0$ mit $1 \leq \ell \leq n$.

Es muss auch $xy^0z = 0^{n-\ell}1^n \in L_4$ gelten. Da aber $y \neq \epsilon$ gelten muss, ist $\ell > 0$ und daher $n - \ell < n$, also insbesondere $n - \ell \neq n$ und damit gilt $xy^0z \notin L_4$. Dies ist ein Widerspruch zur Annahme und wir können schließen, dass L_4 nicht regulär ist.

Hausaufgabe 6 (Pumping Lemma): (2 + 2 + 2 + 2 = 8 Punkte)

Weisen Sie mit Hilfe des Pumping Lemmas nach, dass die folgenden Sprachen nicht regulär sind:

a) $L_5 := \{a^kb^mc^{k+m} \mid k, m \in \mathbb{N}_0\}$ über dem Alphabet $\{a,b,c\}$.

b) $L_6 := \{1^k01^k \mid k \in \mathbb{N}_0\}$ über dem Alphabet $\{0,1\}$.

c) $L_7 := \{a^p \mid p \text{ Primzahl}\}$ über dem Alphabet $\{a\}$.

d) Wir erinnern an die Funktion $rev : \Sigma^* \to \Sigma^*$ aus Hausaufgabe 2(a) auf Übungsblatt 3:

$$\begin{aligned} rev(\epsilon) &:= \epsilon \\ rev(w \cdot a) &:= a \cdot rev(w) && a \in \Sigma, w \in \Sigma^* \end{aligned}$$

$L_8 := \{w \cdot rev(w) \mid w \in \{0,1\}^*\}$ über dem Alphabet $\{0,1\}$.

Lösung:

Alle folgenden Lösungen sind nach demselben Schema aufgebaut. Wir nehmen jeweils an, dass die Sprache L_j regulär ist. Dann muss es nach dem Pumping Lemma eine Länge $n \in \mathbb{N}_{>0}$ geben, so dass für jedes Wort $w \in L_j$ mit $|w| \geq n$ eine Zerlegung $w = xyz$ gibt, so dass $|xy| \leq n$, $y \neq \epsilon$ und $xy^iz \in L_j$ für alle $i \in \mathbb{N}_0$ gilt. Wenn wir für jede solche Zerlegung ein i angeben können, so dass $xy^iz \notin L_j$ gilt, muss die Annahme, dass L_j regulär ist, falsch sein.

a) Wir wählen das Wort $w = a^nb^nc^{2n} \in L_5$. Nach Pumping Lemma muss es also eine Zerlegung xyz von w geben, so dass $xy^iz \in L_5$ für alle $i \in \mathbb{N}_0$. Da $|xy| \leq n$ gelten muss, gibt es ein $\ell \in \mathbb{N}$, mit $\ell \leq n$ so dass $y = a^\ell$ ist.

Es muss auch $xy^0z = xz = a^{n-\ell}b^nc^{2n} \in L_5$ gelten. Da aber $y \neq \epsilon$ gelten muss, ist $\ell > 0$ und daher $a^{n-\ell}b^nc^{2n} \notin L_5$. Dies ist ein Widerspruch zur Annahme und wir können schließen, dass L_5 nicht regulär ist.

b) Wir wählen das Wort $w = 1^n01^n \in L_6$. Nach Pumping Lemma muss es also eine Zerlegung xyz von w geben, so dass $xy^iz \in L_6$ für alle $i \in \mathbb{N}_0$. Sei $y = 1^\ell$ für ein $\ell \in \mathbb{N}_0$ mit $1 \leq \ell \leq n$.

Es muss auch $xy^0z = 1^{n-\ell}01^n \in L_6$ gelten. Da aber $y \neq \epsilon$ gelten muss, ist $\ell > 0$ und daher $1^{n-\ell}01^n \notin L_6$ Dies ist ein Widerspruch zur Annahme und wir können schließen, dass L_6 nicht regulär ist.

c) Wir wählen das Wort $w = a^p \in L_7$ für eine Primzahl $p > n$. Nach Pumping Lemma muss es also eine Zerlegung xyz von w geben, so dass $xy^iz \in L_7$ für alle $i \in \mathbb{N}_0$. Sei $y = a^\ell$ für ein $\ell \in \mathbb{N}_0$ mit $1 \leq \ell \leq n$.

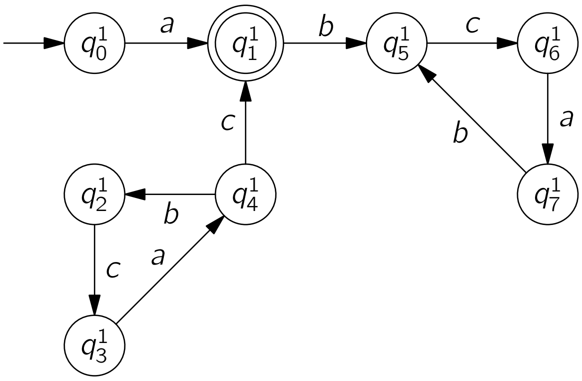
Es muss auch $xy^{p+1}z = a^{|x|+\ell*(p+1)+|z|} = a^{|x|+\ell+|z|+\ell*p} \in L_7$ gelten. Da aber $y \neq \epsilon$ gelten muss, ist $\ell > 0$. Außerdem gilt nach Konstruktion der Zerlegung von w, dass $p = |x|+\ell+|z|$. Also ist $xy^{p+1}z = a^{(\ell+1)*p} \notin L_7$. Dies ist ein Widerspruch zur Annahme und wir können schließen, dass L_7 nicht regulär ist.

d) Wir wählen das Wort $w = 0^n1^{2n}0^n \in L_8$. Nach Pumping Lemma muss es also eine Zerlegung xyz von w geben, so dass $xy^iz \in L_8$ für alle $i \in \mathbb{N}_0$. Sei $y = 0^\ell$ für ein $\ell \in \mathbb{N}_0$ mit $1 \leq \ell \leq n$.

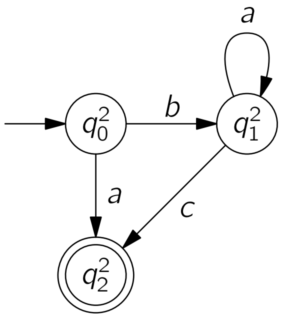
Es muss auch $xy^0z = 0^{n-\ell}1^{2n}0^n \in L_8$ gelten. Da aber $y \neq \epsilon$ gelten muss, ist $\ell > 0$ und daher $n-\ell < n$, also insbesondere $n - \ell \neq n$ und damit gilt $xy^0z \notin L_8$. Dies ist ein Widerspruch zur Annahme und wir können schließen, dass L_8 nicht regulär ist.

Tutoraufgabe 7 (Entscheidungsverfahren):

a) Sei $\Sigma = \{a, b, c\}$ ein Alphabet. Betrachten Sie die folgenden NFAs M_1 und M_2.



M_1



M_2

Entscheiden Sie mit dem in der Vorlesung vorgestellten Verfahren, welche der zwei Sprachen $L(M_1)$ und $L(M_2)$ endlich sind.

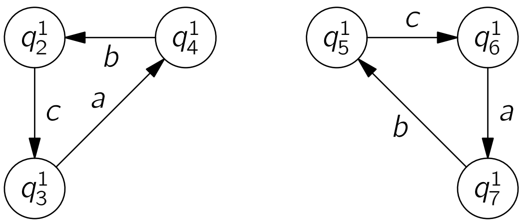
b) Die symmetrische Differenz (bezeichnet mit dem $\oplus$-Operator) zweier Mengen A und B ist definiert als:

$A \oplus B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

Geben Sie ein vollständig automatisierbares Entscheidungsverfahren mithilfe der in der Vorlesung vorgestellten Konzepte an, welches bei Eingabe dreier regulärer Sprachen (spezifiziert durch reguläre Ausdrücke, DFAs, NFAs oder ϵ-NFAs) L_1, L_2, L_3 entscheidet, ob $L_1 \oplus L_2 = L_3$ gilt (d.h. das Verfahren entscheidet das Problem der symmetrischen Differenz regulärer Sprachen).

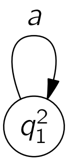
Lösung:

a) M_1 hat die folgenden zwei starken Zusammenhangskomponenten.



Während die erste nicht vom Startzustand aus erreichbar ist, ist von der zweiten aus kein Endzustand erreichbar. Daher ist $L(M_1)$ endlich.

M_2 hat die folgende starke Zusammenhangskomponente.



Diese ist vom Startzustand aus erreichbar und von ihr aus ist ein Endzustand erreichbar. Daher ist $L(M_2)$ nicht endlich.

b) Es gilt:

$$\begin{aligned} L_1 \oplus L_2 = L_3 \quad &\Leftrightarrow \quad (L_1 \cup L_2) \setminus (L_1 \cap L_2) = L_3 \\ &\Leftrightarrow \quad (L_1 \cup L_2) \cap (\Sigma^* \setminus (L_1 \cap L_2)) = L_3 \end{aligned}$$

Falls L_1 und/oder L_2 durch einen regulären Ausdruck spezifiziert sind, wird dieser durch die Thompson-Konstruktion in einen ϵ-NFA überführt. Anschließend haben wir zwei Automaten (DFAs, NFAs oder ϵ-NFAs) M_1 und M_2 mit $L_1 = L(M_1)$ und $L_2 = L(M_2)$.

Wir konstruieren einen ϵ-NFA $M_\cup$ mit $L(M_\cup) = L_1 \cup L_2$ durch Übernahme aller Zustände und Transitionen aus M_1 und M_2 und Einführung eines neuen Zustands als Startzustand, der mit ϵ-Transitionen die ehemaligen Startzustände von M_1 und M_2 erreicht.

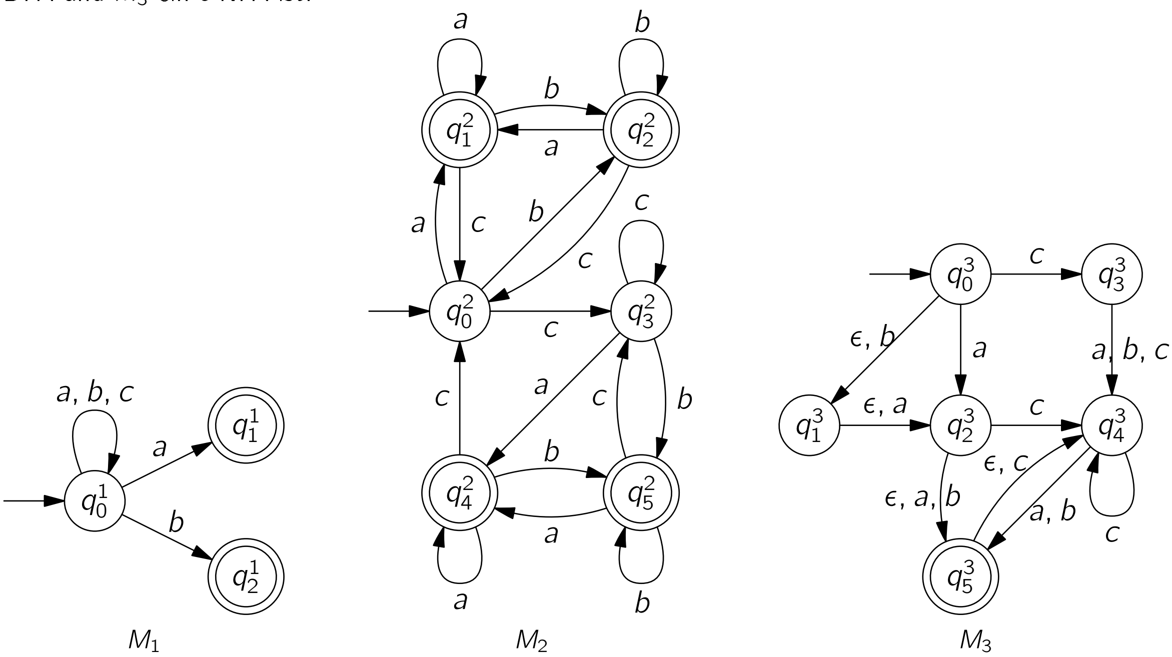
Nun überführen wir mittels ϵ-Kanten-Elimination und Potenzmengenkonstruktion die Automaten M_1, M_2 und $M_\cup$ in DFAs M'_1, M'_2 und $M'_\cup$.

Wir konstruieren den Produktautomaten $M_\cap$ der beiden Automaten M'_1 und M'_2, welcher die Sprache $L_1 \cap L_2$ erkennt. Da M'_1 und M'_2 DFAs sind, ist $M_\cap$ ebenfalls ein DFA. Wir konstruieren den Komplementärautomaten M_C von $M_\cap$, welcher die Sprache $\Sigma^* \setminus (L_1 \cap L_2)$ erkennt. M_C ist ebenfalls ein DFA.

Schließlich bilden wir den Produktautomaten M der beiden DFAs $M'_\cup$ und M_C, welcher die Sprache $(L_1 \cup L_2) \cap (\Sigma^* \setminus (L_1 \cap L_2))$ erkennt. Damit haben wir das Problem der symmetrischen Differenz regulärer Sprachen auf das Äquivalenzproblem reduziert und können anschließend das entsprechende Verfahren aus der Vorlesung benutzen, um $L(M) = L_3$ zu entscheiden.

Hausaufgabe 8 (Entscheidungsverfahren): (10 Punkte)

Sei $\Sigma = \{a, b, c\}$ ein Alphabet. Betrachten Sie die folgenden Automaten M_1, M_2, M_3, wobei M_1 ein NFA, M_2 ein DFA und M_3 ein ϵ-NFA ist.

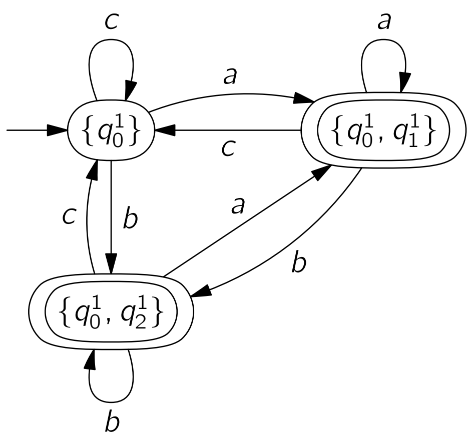


Entscheiden Sie mit dem in der Vorlesung vorgestellten Verfahren zur Lösung des Äquivalenzproblems, welche der drei Sprachen $L(M_1)$, $L(M_2)$ und $L(M_3)$ gleich sind. Geben Sie dabei nach jeder Transformation (wie z.B.

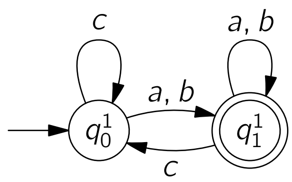
Thompson-Konstruktion, ϵ-Kanten-Elimination, Potenzmengenkonstruktion, Minimierung) den jeweils resultierenden Automaten an.

Lösung:

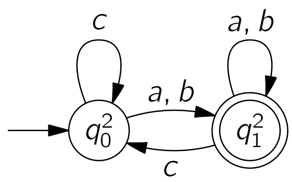
Wir wenden zuerst die Potenzmengenkonstruktion auf M_1 an und erhalten den folgenden Automaten M_1'.



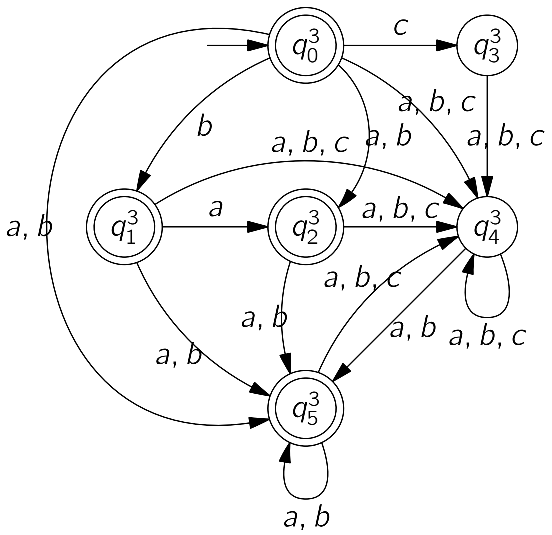
Minimierung von M_1' liefert den folgenden minimalen DFA M_1''.



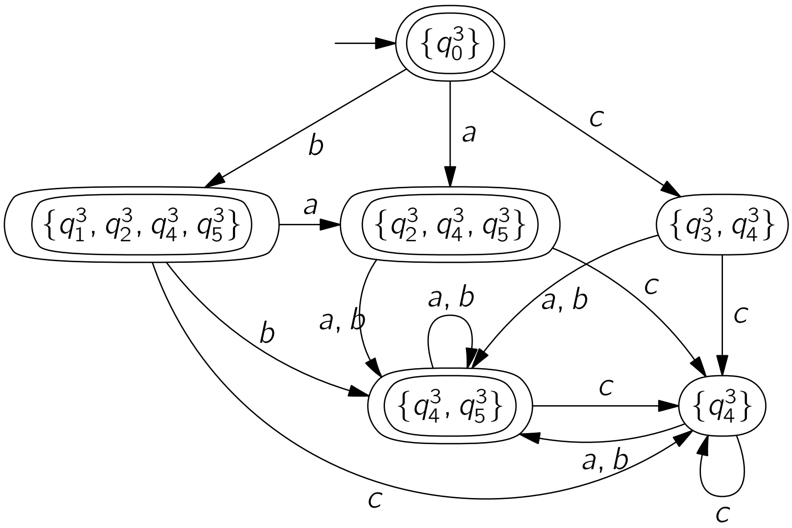
Danach minimieren wir den DFA M_2 und erhalten den folgenden minimalen DFA M_2'.



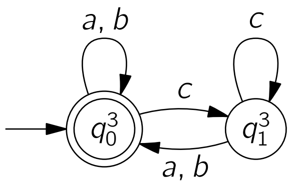
Nun entfernen wir die ϵ-Transitionen aus M_3 und erhalten den folgenden NFA M_3'.



Nach Anwendung der Potenzmengenkonstruktion erhalten wir den folgenden DFA M_3''.



Minimierung von M_3'' führt zu dem folgenden minimalen DFA M_3'''.



Schließlich überprüfen wir die minimalen DFAs auf Isomorphie und erkennen, dass $L(M_1) = L(M_2) \neq L(M_3)$.