Prof. Dr. J. Giesl
M. Brockschmidt, F. Emmes, C. Fuhs, C. Otto, T. Ströder

Hinweise:

- Die **Hausaufgaben** sollen in Gruppen von je 2 Studierenden aus dem gleichen Tutorium bearbeitet werden.
- Die Lösungen der Hausaufgaben müssen bis Mi., 7.07.2010 im Tutorium abgegeben werden. Alternativ ist es bis 17 Uhr möglich, diese in den Kasten im Flur des LuFG I2 einzuwerfen (Ahornstr. 55, E1, 2. Etage).
- Namen und Matrikelnummern der Studierenden sowie **die Nummer der Übungsgruppe** sind auf jedes Blatt der Abgabe zu schreiben. **Heften bzw. tackern Sie die Blätter**!
- Die **Tutoraufgaben** werden in den jeweiligen Tutorien gemeinsam besprochen und bearbeitet.

Tutoraufgabe 1 ((Deterministische) Kellerautomaten):

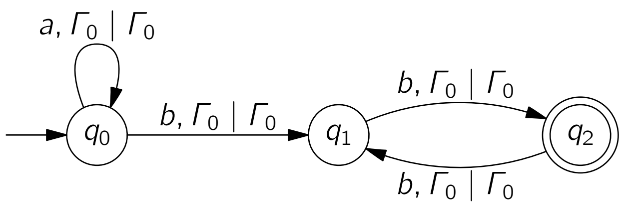
Geben Sie für die folgenden kontextfreien Sprachen L_i einen PDA M_i an, so dass $L_i = L(M_i)$. Wenn möglich, soll M_i ein deterministischer PDA sein.

a) $L_1 = \{a^n b^{2m} \mid n \in \mathbb{N}_0, m \in \mathbb{N}_{>0}\}$

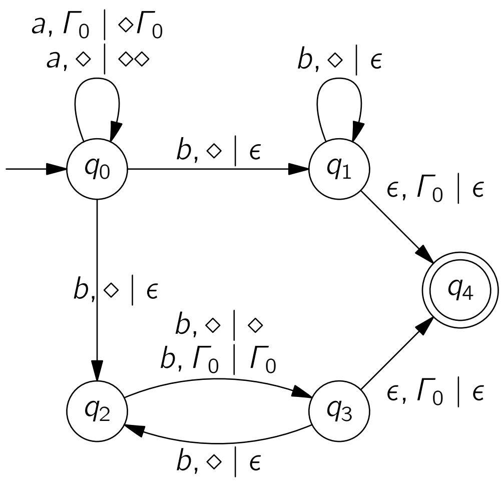
b) $L_2 = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}_{>0}\} \cup \{a^n b^{2n} \mid n \in \mathbb{N}_{>0}\}$

Lösung:

a) Der folgende deterministische PDA erkennt L_1:



b) Der folgende nicht-deterministische PDA erkennt L_2:



Hausaufgabe 2 ((Deterministische) Kellerautomaten): (2 + 3 = 5 Punkte)

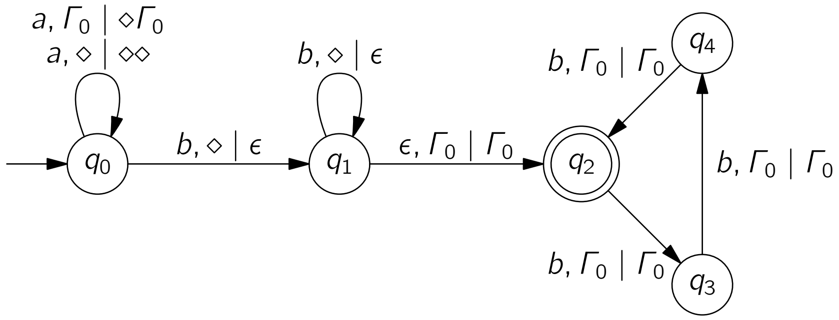
Geben Sie für die folgenden kontextfreien Sprachen L_i einen PDA M_i an, so dass $L_i = L(M_i)$. Wenn möglich, soll M_i ein deterministischer PDA sein.

a) $L_1 = \{a^n b^{n+3k} \mid n \in \mathbb{N}_{>0}, k \in \mathbb{N}_0\}$

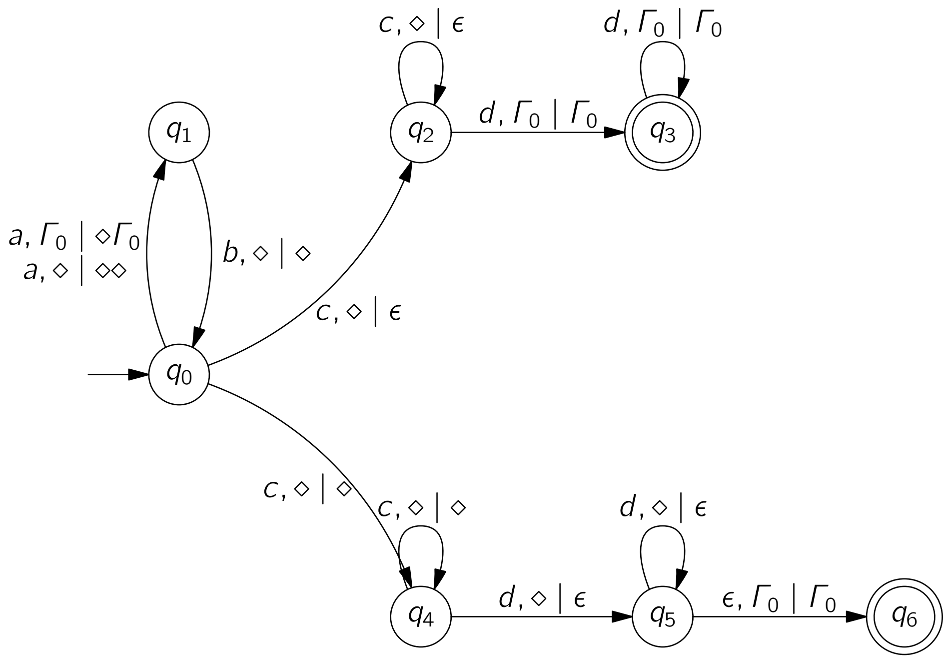
b) $L_2 = \{(ab)^n c^m d^\ell \mid n, m, \ell \in \mathbb{N}_{>0} \wedge (n = m \vee n = \ell)\}$

Lösung:

a) Der folgende deterministische PDA erkennt L_1:

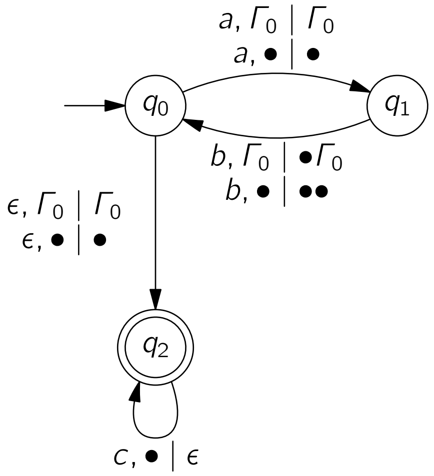


b) Der folgende nicht-deterministische PDA erkennt L_2:



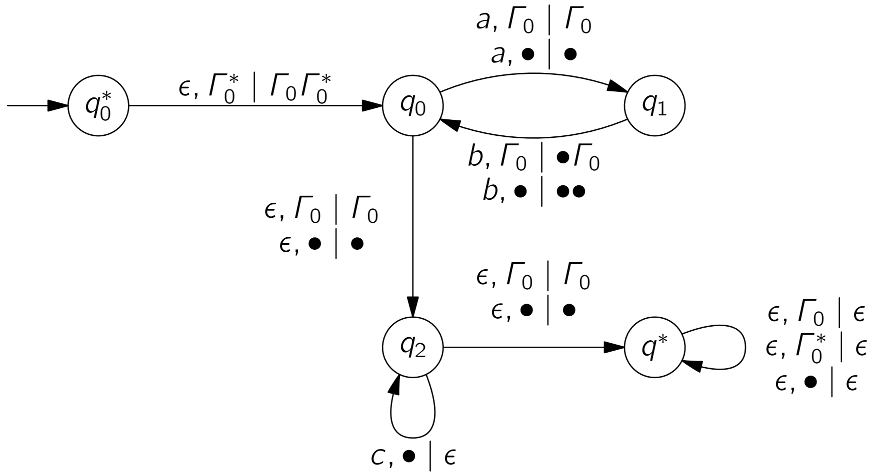
Tutoraufgabe 3 (Akzeptanzbedingungen von Kellerautomaten):

Gegeben sei der PDA $A = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \Gamma_0)$.



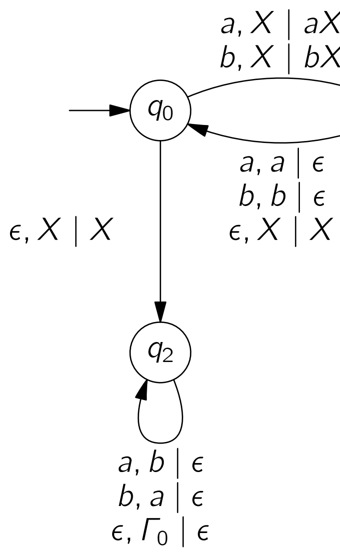
Verwenden Sie das Verfahren aus der Vorlesung, um einen PDA B zu konstruieren, so dass $N(B) = L(A)$ gilt.

Lösung:



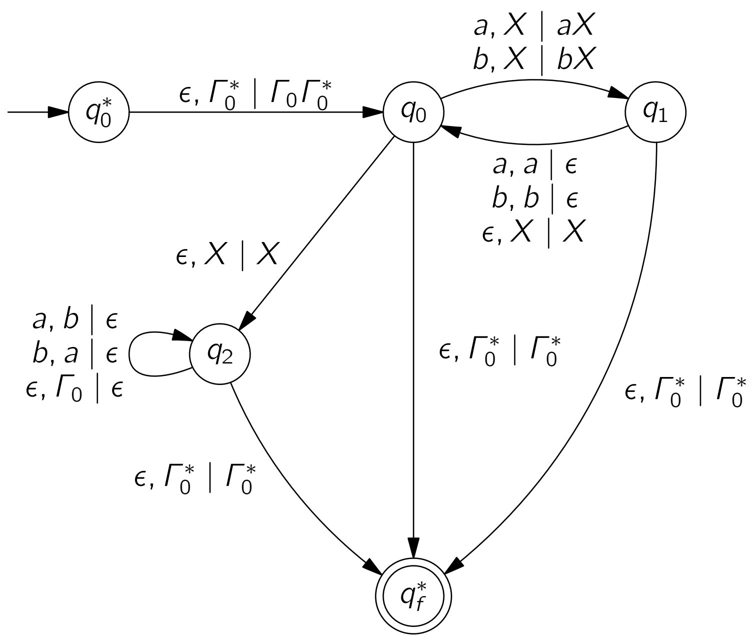
Hausaufgabe 4 (Akzeptanzbedingungen von Kellerautomaten): (3 Punkte)

Gegeben sei der PDA $A = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \Gamma_0)$.



Hierbei steht X abkürzend für a oder b.
Verwenden Sie das Verfahren aus der Vorlesung, um einen PDA B zu konstruieren, so dass $L(B) = N(A)$ gilt.

Lösung:



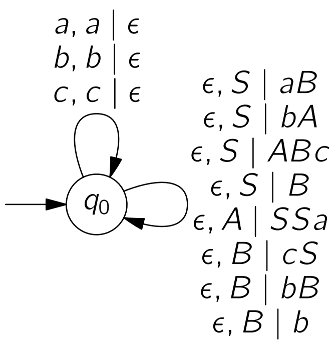
Tutoraufgabe 5 (CFGs und Kellerautomaten):

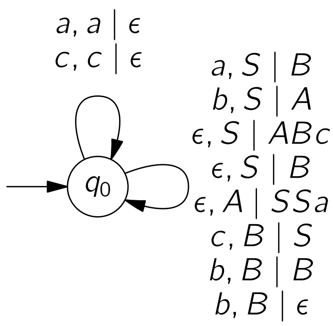
Überführen Sie die folgende Grammatik G mit dem in der Vorlesung vorgestellten Verfahren in einen Kellerautomaten M mit $L(G) = N(M)$.

$$\begin{array}{rcl} S & \to & aB \mid bA \mid ABc \mid B \\ A & \to & SSa \\ B & \to & cS \mid bB \mid b \end{array}$$

Lösung:

Links ist die direkte Lösung zu sehen, rechts eine Lösung, in der Terminalsymbole direkt konsumiert werden, statt sie auf den Keller zu legen. Das Kellerbodensymbol ist jeweils S:





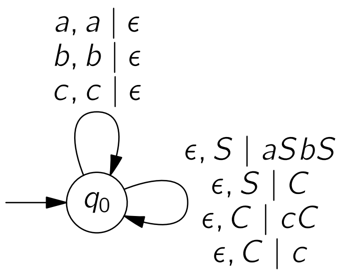
Hausaufgabe 6 (CFGs und Kellerautomaten): (2 Punkte)

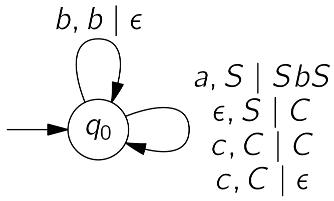
Überführen Sie die folgende Grammatik G mit dem in der Vorlesung vorgestellten Verfahren in einen Kellerautomaten M mit $L(G) = N(M)$.

$$\begin{array}{rcl} S & \to & aSbS \mid C \\ C & \to & cC \mid c \end{array}$$

Lösung:

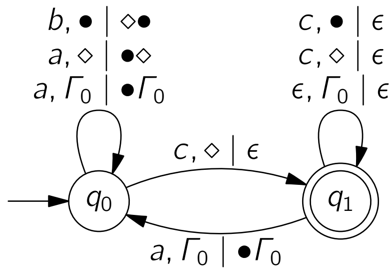
Links ist die direkte Lösung zu sehen, rechts eine Lösung, in der Terminalsymbole direkt konsumiert werden, statt sie auf den Keller zu legen. Das Kellerbodensymbol ist jeweils S:





Tutoraufgabe 7 (Kellerautomaten und CFGs):

Betrachten Sie den folgenden Kellerautomaten M über dem Eingabealphabet $\{a, b, c\}$ und dem Kelleralphabet $\{\circ, \diamond, \Gamma_0\}$:



a) Geben Sie die Sprachen $L(M)$ und $N(M)$ (ohne Beweis) an.

b) Geben Sie eine kontextfreie Grammatik G an, so dass $L(G) = N(M)$ gilt. Verwenden Sie hierzu das Verfahren aus der Vorlesung. Geben Sie zu jeder Transition $\delta(q, a, X) = \{(p, Y)\}$ die daraus entstehenden Grammatikregeln an.

c) Geben Sie für das Wort $abcc$ einen Lauf durch den Automaten M an, d.h. eine Folge von Konfigurationen, die mit $(q_0, abcc, \Gamma_0)$ beginnt und mit (p, ϵ, ϵ) für ein $p \in \{q_0, q_1\}$ endet.

Geben Sie außerdem einen Ableitungsbaum für $abcc$ auf Basis der Grammatik G aus Teil (b) an.

Lösung:

a)

$$N(M) = (\{(ab)^n c^{2n} \mid n \in \mathbb{N}_{>0}\})^+$$
$$L(M) = (\{(ab)^n c^{2n} \mid n \in \mathbb{N}_{>0}\})^* \cdot \{(ab)^n c^m \mid n, m \in \mathbb{N}_{>0} \wedge m \leq 2n\}$$

b) Wir benötigen zuerst die Menge N der Nonterminale $\{[q, Z, r] \mid q, r \in Q, Z \in \Gamma\}$. Diese ist in unserem Falle

$$\{[q_0, \diamond, q_0], [q_0, \diamond, q_1], [q_0, \bullet, q_0], [q_0, \bullet, q_1], [q_0, \Gamma_0, q_0], [q_0, \Gamma_0, q_1],$$
$$[q_1, \diamond, q_0], [q_1, \diamond, q_1], [q_1, \bullet, q_0], [q_1, \bullet, q_1], [q_1, \Gamma_0, q_0], [q_1, \Gamma_0, q_1]\}$$

Wir müssen nun die Regelmenge P erzeugen. Dafür betrachten wir nun jede der Transitionen in M. Im Folgenden sind jeweils die Zusammenhänge zwischen den Teilen der erzeugenden Transition und der erzeugten Regel farblich dargestellt:

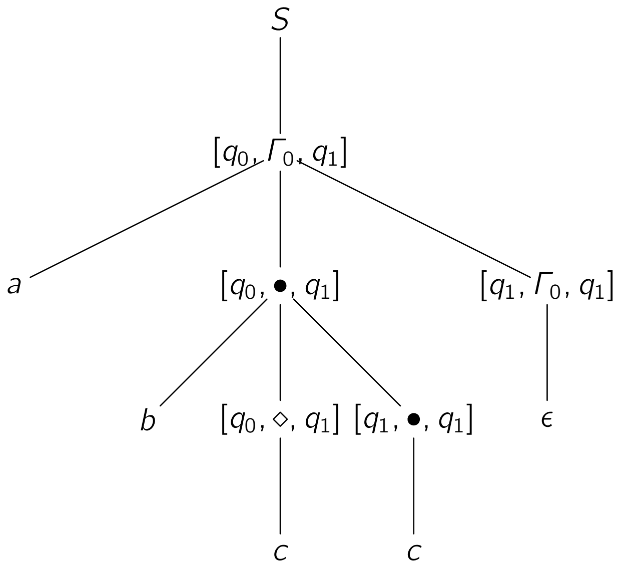
- $\delta(q_0, a, \Gamma_0) = \{(q_0, \bullet\Gamma_0)\}$:
  - $[q_0, \Gamma_0, q_0] \to a[q_0, \bullet, q_0][q_0, \Gamma_0, q_0]$
  - $[q_0, \Gamma_0, q_0] \to a[q_0, \bullet, q_1][q_1, \Gamma_0, q_0]$
  - $[q_0, \Gamma_0, q_1] \to a[q_0, \bullet, q_0][q_0, \Gamma_0, q_1]$
  - $[q_0, \Gamma_0, q_1] \to a[q_0, \bullet, q_1][q_1, \Gamma_0, q_1]$
- $\delta(q_0, a, \diamond) = \{(q_0, \bullet\diamond)\}$:
  - $[q_0, \diamond, q_0] \to a[q_0, \bullet, q_0][q_0, \diamond, q_0]$
  - $[q_0, \diamond, q_0] \to a[q_0, \bullet, q_1][q_1, \diamond, q_0]$
  - $[q_0, \diamond, q_1] \to a[q_0, \bullet, q_0][q_0, \diamond, q_1]$
  - $[q_0, \diamond, q_1] \to a[q_0, \bullet, q_1][q_1, \diamond, q_1]$
- $\delta(q_0, b, \bullet) = \{(q_0, \diamond\bullet)\}$:
  - $[q_0, \bullet, q_0] \to b[q_0, \diamond, q_0][q_0, \bullet, q_0]$
  - $[q_0, \bullet, q_0] \to b[q_0, \diamond, q_1][q_1, \bullet, q_0]$
  - $[q_0, \bullet, q_1] \to b[q_0, \diamond, q_0][q_0, \bullet, q_1]$
  - $[q_0, \bullet, q_1] \to b[q_0, \diamond, q_1][q_1, \bullet, q_1]$
- $\delta(q_0, c, \diamond) = \{(q_1, \epsilon)\}$:
  - $[q_0, \diamond, q_1] \to c$
- $\delta(q_1, c, \bullet) = \{(q_1, \epsilon)\}$:
  - $[q_1, \bullet, q_1] \to c$
- $\delta(q_1, c, \diamond) = \{(q_1, \epsilon)\}$:
  - $[q_1, \diamond, q_1] \to c$
- $\delta(q_1, \epsilon, \Gamma_0) = \{(q_1, \epsilon)\}$:
  - $[q_1, \Gamma_0, q_1] \to \epsilon$
- $\delta(q_1, a, \Gamma_0) = \{(q_0, \bullet\Gamma_0)\}$:
  - $[q_1, \Gamma_0, q_0] \to a[q_0, \bullet, q_0][q_0, \Gamma_0, q_0]$
  - $[q_1, \Gamma_0, q_0] \to a[q_0, \bullet, q_1][q_1, \Gamma_0, q_0]$
  - $[q_1, \Gamma_0, q_1] \to a[q_0, \bullet, q_0][q_0, \Gamma_0, q_1]$
  - $[q_1, \Gamma_0, q_1] \to a[q_0, \bullet, q_1][q_1, \Gamma_0, q_1]$

Die gewünschte Grammatik ist nun $(N \cup \{S\}, \Sigma, P \cup \{S \to [q_0, \Gamma_0, q_0], S \to [q_0, \Gamma_0, q_1]\}, S)$.

c) Zuerst der gewünschte Konfigurationslauf:

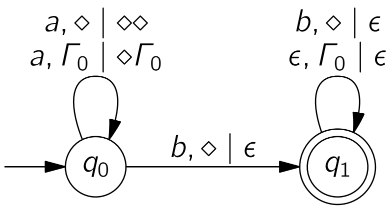
$$\begin{aligned}(q_0, abcc, \Gamma_0) &\vdash (q_0, bcc, \bullet\Gamma_0)\\ &\vdash (q_0, cc, \diamond\bullet\Gamma_0)\\ &\vdash (q_1, c, \bullet\Gamma_0)\\ &\vdash (q_1, \epsilon, \Gamma_0)\\ &\vdash (q_1, \epsilon, \epsilon)\end{aligned}$$

Der Ableitungsbaum:



Hausaufgabe 8 (Kellerautomaten und CFGs): (2 + 6 + 2 = 10 Punkte)

Betrachten Sie den folgenden Kellerautomaten M über dem Eingabealphabet $\{a, b\}$ und dem Kelleralphabet $\{\diamond, \Gamma_0\}$:



a) Geben Sie die Sprachen $L(M)$ und $N(M)$ (ohne Beweis) an.

b) Geben Sie eine kontextfreie Grammatik G an, so dass $L(G) = N(M)$ gilt. Verwenden Sie hierzu das Verfahren aus der Vorlesung. Geben Sie zu jeder Transition $\delta(q, a, X) = \{(p, Y)\}$ die daraus entstehenden Grammatikregeln an.

c) Geben Sie für das Wort *aabb* einen Lauf durch den Automaten M an, d.h. eine Folge von Konfigurationen, die mit $(q_0, aabb, \Gamma_0)$ beginnt und mit (p, ϵ, ϵ) für ein $p \in \{q_0, q_1\}$ endet.

Geben Sie außerdem einen Ableitungsbaum für *aabb* auf Basis der Grammatik G aus Teil (b) an.

Lösung:

a) Es gilt $L(M) = \{a^n b^m \mid n, m \in \mathbb{N}_{>0} \wedge 1 \leq m \leq n\}$ und $N(M) = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}_{>0}\}$.

b) Wir benötigen zuerst die Menge N der Nonterminale $\{[q, Z, r] \mid q, r \in Q, Z \in \Gamma\}$. Diese ist in unserem Falle

$$\{[q_0, \diamond, q_0], [q_0, \diamond, q_1], [q_0, \Gamma_0, q_0], [q_0, \Gamma_0, q_1],$$
$$[q_1, \diamond, q_0], [q_1, \diamond, q_1], [q_1, \Gamma_0, q_0], [q_1, \Gamma_0, q_1]\}$$

Wir müssen nun die Regelmenge P erzeugen. Dafür betrachten wir nun jede der Transitionen in M. Im Folgenden sind jeweils die Zusammenhänge zwischen den Teilen der erzeugenden Transition und der erzeugten Regel farblich dargestellt:

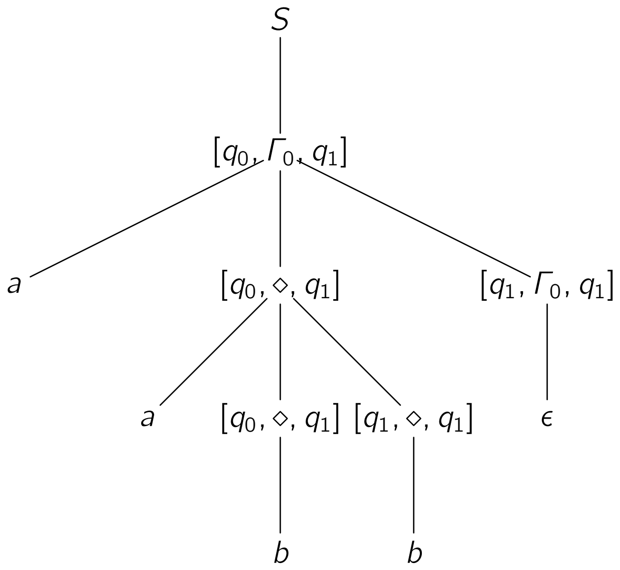
- $\delta(q_0, a, \Gamma_0) = \{(q_0, \diamond\Gamma_0)\}$:
  - $[q_0, \Gamma_0, q_0] \to a[q_0, \diamond, q_0][q_0, \Gamma_0, q_0]$
  - $[q_0, \Gamma_0, q_0] \to a[q_0, \diamond, q_1][q_1, \Gamma_0, q_0]$
  - $[q_0, \Gamma_0, q_1] \to a[q_0, \diamond, q_0][q_0, \Gamma_0, q_1]$
  - $[q_0, \Gamma_0, q_1] \to a[q_0, \diamond, q_1][q_1, \Gamma_0, q_1]$
- $\delta(q_0, a, \diamond) = \{(q_0, \diamond\diamond)\}$:
  - $[q_0, \diamond, q_0] \to a[q_0, \diamond, q_0][q_0, \diamond, q_0]$
  - $[q_0, \diamond, q_0] \to a[q_0, \diamond, q_1][q_1, \diamond, q_0]$
  - $[q_0, \diamond, q_1] \to a[q_0, \diamond, q_0][q_0, \diamond, q_1]$
  - $[q_0, \diamond, q_1] \to a[q_0, \diamond, q_1][q_1, \diamond, q_1]$
- $\delta(q_0, b, \diamond) = \{(q_1, \epsilon)\}$:
  - $[q_0, \diamond, q_1] \to b$
- $\delta(q_1, b, \diamond) = \{(q_1, \epsilon)\}$:
  - $[q_1, \diamond, q_1] \to b$
- $\delta(q_1, \epsilon, \Gamma_0) = \{(q_1, \epsilon)\}$:
  - $[q_1, \Gamma_0, q_1] \to \epsilon$

Die gewünschte Grammatik ist nun $(N \cup \{S\}, \Sigma, P \cup \{S \to [q_0, \Gamma_0, q_0], S \to [q_0, \Gamma_0, q_1]\}, S)$.

c) Zuerst der gewünschte Konfigurationslauf:

$$\begin{aligned}(q_0, aabb, \Gamma_0) &\vdash (q_0, abb, \diamond\Gamma_0)\\ &\vdash (q_0, bb, \diamond\diamond\Gamma_0)\\ &\vdash (q_1, b, \diamond\Gamma_0)\\ &\vdash (q_1, \epsilon, \Gamma_0)\\ &\vdash (q_1, \epsilon, \epsilon)\end{aligned}$$

Der Ableitungsbaum:



Tutoraufgabe 9 (Abschlusseigenschaften kontextfreier Sprachen):

Sei $\Sigma = \{a, b, c\}$ ein Alphabet. Zu welchen der drei Klassen

- deterministisch kontextfrei
- kontextfrei, aber nicht deterministisch kontextfrei
- nicht kontextfrei

gehören folgende Sprachen über Σ? Beweisen Sie Ihre Antwort ausschließlich mit Hilfe der Abschlusseigenschaften (deterministisch) kontextfreier Sprachen, d.h. Sie dürfen nicht das Pumping-Lemma, CFGs oder Automaten verwenden. Sie dürfen jedoch verwenden, dass folgende Sprachen zu folgenden Klassen gehören:

- $L_1 = \{a^m b^m c^n \mid m, n \geq 0\}$ deterministisch kontextfrei
- $L_2 = \{a^l b^m c^n \mid l, m, n \geq 0\}$ regulär
- $L_3 = \{a^m b^n a^m b^n \mid m, n \geq 0\}$ nicht kontextfrei
- $L_4 = \{a^k b^l a^m b^n \mid k, l, m, n \geq 0\}$ regulär

Außerdem dürfen Sie verwenden, dass deterministisch kontextfreie Sprachen unter Schnitt mit regulären Sprachen abgeschlossen sind.

a) $L_x = \{a^l b^m c^n \mid l, m, n \geq 0 \land l \neq m\}$

Beispielsweise gilt:

- $abbc \in L_x$
- $aabc \in L_x$
- $ac \in L_x$
- $abcc \notin L_x$
- $ab \notin L_x$

b) $L_y = \{a^l c^m b^n a^l b^n c^m \mid l, m, n \geq 0\}$

Beispielsweise gilt:

- $acbabc \in L_y$
- $aa \in L_y$
- $cbbc \in L_y$
- $a \notin L_y$
- $abcabc \notin L_y$

Lösung:

a) Es gilt $L_x = \overline{L_1} \cap L_2$. Aufgrund der Abgeschlossenheit deterministisch kontextfreier Sprachen unter Komplement und Schnitt mit regulären Sprachen ist L_x damit deterministisch kontextfrei.

b) Es gilt $L_3 = L_y \cap L_4$. Aufgrund der Abgeschlossenheit kontextfreier Sprachen unter Schnitt mit regulären Sprachen ist L_y damit nicht kontextfrei.

Hausaufgabe 10 (Abschlusseigenschaften kontextfreier Sprachen): (2 + 3 + 4 = 9 Punkte)

Sei $\Sigma = \{a, b, c\}$ ein Alphabet. Zu welchen der drei Klassen

- deterministisch kontextfrei
- kontextfrei, aber nicht deterministisch kontextfrei
- nicht kontextfrei

gehören folgende Sprachen über Σ? Beweisen Sie Ihre Antwort ausschließlich mit Hilfe der Abschlusseigenschaften (deterministisch) kontextfreier Sprachen, d.h. Sie dürfen nicht das Pumping-Lemma, CFGs oder Automaten verwenden. Sie dürfen jedoch verwenden, dass folgende Sprachen zu folgenden Klassen gehören:

- $L_1 = \{a^m b^m c^n \mid m, n \geq 0\}$ deterministisch kontextfrei
- $L_2 = \{a^m b^n c^n \mid m, n \geq 0\}$ deterministisch kontextfrei
- $L_3 = \{a^l b^m c^n \mid l, m, n \geq 0\}$ regulär
- $L_4 = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$ nicht kontextfrei
- $L_5 = \{w \in \Sigma^* \mid \sharp_a(w) \text{ ist gerade}\}$ regulär

Außerdem dürfen Sie verwenden, dass deterministisch kontextfreie Sprachen unter Schnitt mit regulären Sprachen abgeschlossen sind.

a) $L_a = \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ enthält mindestens eines der Teilwörter } ba, cb, ac, ca \vee \sharp_a(w) \neq \sharp_b(w)\}$

Beispielsweise gilt:

- $aababb \in L_a$
- $abb \in L_a$

- $caabb \in L_a$
- $cc \notin L_a$
- $aabbc \notin L_a$

b) $L_b = \{w \in \Sigma^* \mid \sharp_a(w) \text{ ist ungerade } \Rightarrow \sharp_a(w) = \sharp_b(w) = \sharp_c(w)\}$

Beispielsweise gilt:

- $acab \in L_b$
- $bb \in L_b$
- $abccababc \in L_b$
- $acc \notin L_b$
- $abbcc \notin L_b$

c) $L_c = \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ enthält mindestens eines der Teilwörter } ba, cb, ac, ca \vee \sharp_a(w) \neq \sharp_b(w) \vee \sharp_b(w) \neq \sharp_c(w)\}$

Beispielsweise gilt:

- $caabb \in L_c$
- $cc \in L_c$
- $aabbc \in L_c$
- $aabbcc \notin L_c$

Lösung:

a) Es gilt $L_a = \overline{L_1}$. Aufgrund der Abgeschlossenheit deterministisch kontextfreier Sprachen unter Komplement ist L_a damit deterministisch kontextfrei.

b) Es gilt $L_4 = (L_b \setminus L_5) \cap L_3$. Aufgrund der Abgeschlossenheit kontextfreier Sprachen unter Schnitt und Differenz mit regulären Sprachen ist L_b damit nicht kontextfrei.

c) Es gilt $L_4 = \overline{L_c}$. Aufgrund der Abgeschlossenheit deterministisch kontextfreier Sprachen unter Komplement ist L_c damit nicht deterministisch kontextfrei. Weiterhin gilt $L_c = \overline{L_1} \cup \overline{L_2}$. Aufgrund der Abgeschlossenheit deterministisch kontextfreier Sprachen unter Komplement sind $\overline{L_1}$ und $\overline{L_2}$ deterministisch kontextfrei. Damit ist dann auch aufgrund der Abgeschlossenheit kontextfreier Sprachen unter Vereinigung L_c kontextfrei. Insgesamt ist L_c also kontextfrei, aber nicht deterministisch kontextfrei.