

**Hinweise:**

- Die **Hausaufgaben** sollen in Gruppen von je 2 Studierenden aus dem gleichen Tutorium bearbeitet werden.
- Die Lösungen der Hausaufgaben müssen bis Mi., 7.07.2010 im Tutorium abgegeben werden. Alternativ ist es bis 17 Uhr möglich, diese in den Kasten im Flur des LuFG I2 einzuwerfen (Ahornstr. 55, E1, 2. Etage).
- Namen und Matrikelnummern der Studierenden sowie **die Nummer der Übungsgruppe** sind auf jedes Blatt der Abgabe zu schreiben. **Heften bzw. tackern Sie die Blätter!**
- Die **Tutoraufgaben** werden in den jeweiligen Tutorien gemeinsam besprochen und bearbeitet.

**Tutoraufgabe 1 ((Deterministische) Kellerautomaten):**

Geben Sie für die folgenden kontextfreien Sprachen  $L_i$  einen PDA  $M_i$  an, so dass  $L_i = L(M_i)$ . Wenn möglich, soll  $M_i$  ein deterministischer PDA sein.

- $L_1 = \{a^n b^{2m} \mid n \in \mathbb{N}_0, m \in \mathbb{N}_{>0}\}$
- $L_2 = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}_{>0}\} \cup \{a^n b^{2n} \mid n \in \mathbb{N}_{>0}\}$

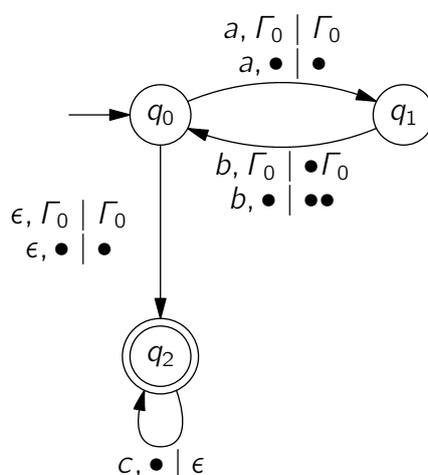
**Hausaufgabe 2 ((Deterministische) Kellerautomaten):**
**(2 + 3 = 5 Punkte)**

Geben Sie für die folgenden kontextfreien Sprachen  $L_i$  einen PDA  $M_i$  an, so dass  $L_i = L(M_i)$ . Wenn möglich, soll  $M_i$  ein deterministischer PDA sein.

- $L_1 = \{a^n b^{n+3k} \mid n \in \mathbb{N}_{>0}, k \in \mathbb{N}_0\}$
- $L_2 = \{(ab)^n c^m d^\ell \mid n, m, \ell \in \mathbb{N}_{>0} \wedge (n = m \vee n = \ell)\}$

**Tutoraufgabe 3 (Akzeptanzbedingungen von Kellerautomaten):**

Gegeben sei der PDA  $A = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \Gamma_0)$ .

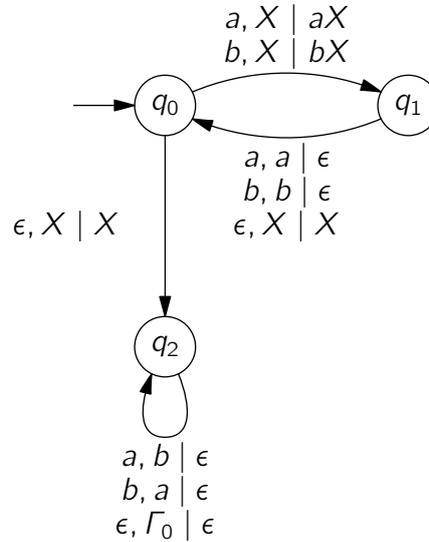


Verwenden Sie das Verfahren aus der Vorlesung, um einen PDA  $B$  zu konstruieren, so dass  $N(B) = L(A)$  gilt.

**Hausaufgabe 4 (Akzeptanzbedingungen von Kellerautomaten):**

**(3 Punkte)**

Gegeben sei der PDA  $A = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \Gamma_0)$ .



Hierbei steht  $X$  abkürzend für  $a$  oder  $b$ .

Verwenden Sie das Verfahren aus der Vorlesung, um einen PDA  $B$  zu konstruieren, so dass  $L(B) = N(A)$  gilt.

**Tutoraufgabe 5 (CFGs und Kellerautomaten):**

Überführen Sie die folgende Grammatik  $G$  mit dem in der Vorlesung vorgestellten Verfahren in einen Kellerautomaten  $M$  mit  $L(G) = N(M)$ .

$$\begin{aligned}
 S &\rightarrow aB \mid bA \mid ABc \mid B \\
 A &\rightarrow SSa \\
 B &\rightarrow cS \mid bB \mid b
 \end{aligned}$$

**Hausaufgabe 6 (CFGs und Kellerautomaten):**

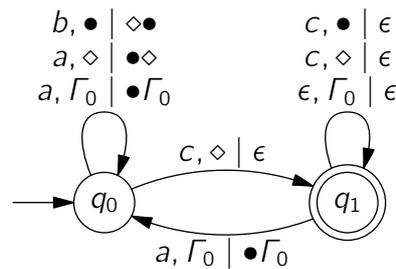
**(2 Punkte)**

Überführen Sie die folgende Grammatik  $G$  mit dem in der Vorlesung vorgestellten Verfahren in einen Kellerautomaten  $M$  mit  $L(G) = N(M)$ .

$$\begin{aligned}
 S &\rightarrow aSbS \mid C \\
 C &\rightarrow cC \mid c
 \end{aligned}$$

**Tutoraufgabe 7 (Kellerautomaten und CFGs):**

Betrachten Sie den folgenden Kellerautomaten  $M$  über dem Eingabealphabet  $\{a, b, c\}$  und dem Kelleralphabet  $\{\circ, \diamond, \Gamma_0\}$ :

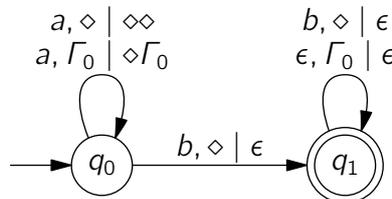


- Geben Sie die Sprachen  $L(M)$  und  $N(M)$  (ohne Beweis) an.
- Geben Sie eine kontextfreie Grammatik  $G$  an, so dass  $L(G) = N(M)$  gilt. Verwenden Sie hierzu das Verfahren aus der Vorlesung. Geben Sie zu jeder Transition  $\delta(q, a, X) = \{(p, Y)\}$  die daraus entstehenden Grammatikregeln an.
- Geben Sie für das Wort  $abcc$  einen Lauf durch den Automaten  $M$  an, d.h. eine Folge von Konfigurationen, die mit  $(q_0, abcc, \Gamma_0)$  beginnt und mit  $(p, \epsilon, \epsilon)$  für ein  $p \in \{q_0, q_1\}$  endet. Geben Sie außerdem einen Ableitungsbaum für  $abcc$  auf Basis der Grammatik  $G$  aus Teil (b) an.

### Hausaufgabe 8 (Kellerautomaten und CFGs):

(2 + 6 + 2 = 10 Punkte)

Betrachten Sie den folgenden Kellerautomaten  $M$  über dem Eingabealphabet  $\{a, b\}$  und dem Kelleralphabet  $\{\diamond, \Gamma_0\}$ :



- Geben Sie die Sprachen  $L(M)$  und  $N(M)$  (ohne Beweis) an.
- Geben Sie eine kontextfreie Grammatik  $G$  an, so dass  $L(G) = N(M)$  gilt. Verwenden Sie hierzu das Verfahren aus der Vorlesung. Geben Sie zu jeder Transition  $\delta(q, a, X) = \{(p, Y)\}$  die daraus entstehenden Grammatikregeln an.
- Geben Sie für das Wort  $aabb$  einen Lauf durch den Automaten  $M$  an, d.h. eine Folge von Konfigurationen, die mit  $(q_0, aabb, \Gamma_0)$  beginnt und mit  $(p, \epsilon, \epsilon)$  für ein  $p \in \{q_0, q_1\}$  endet. Geben Sie außerdem einen Ableitungsbaum für  $aabb$  auf Basis der Grammatik  $G$  aus Teil (b) an.

### Tutoraufgabe 9 (Abschlusseigenschaften kontextfreier Sprachen):

Sei  $\Sigma = \{a, b, c\}$  ein Alphabet. Zu welchen der drei Klassen

- deterministisch kontextfrei
- kontextfrei, aber nicht deterministisch kontextfrei
- nicht kontextfrei

gehören folgende Sprachen über  $\Sigma$ ? Beweisen Sie Ihre Antwort ausschließlich mit Hilfe der Abschlusseigenschaften (deterministisch) kontextfreier Sprachen, d.h. Sie dürfen nicht das Pumping-Lemma, CFGs oder Automaten verwenden. Sie dürfen jedoch verwenden, dass folgende Sprachen zu folgenden Klassen gehören:

- $L_1 = \{a^m b^m c^n \mid m, n \geq 0\}$  deterministisch kontextfrei
- $L_2 = \{a^l b^m c^n \mid l, m, n \geq 0\}$  regulär
- $L_3 = \{a^m b^n a^m b^n \mid m, n \geq 0\}$  nicht kontextfrei
- $L_4 = \{a^k b^l a^m b^n \mid k, l, m, n \geq 0\}$  regulär

Außerdem dürfen Sie verwenden, dass deterministisch kontextfreie Sprachen unter Schnitt mit regulären Sprachen abgeschlossen sind.

a)  $L_x = \{a^l b^m c^n \mid l, m, n \geq 0 \wedge l \neq m\}$

Beispielsweise gilt:

- $abbc \in L_x$
- $aabc \in L_x$
- $ac \in L_x$
- $abcc \notin L_x$
- $ab \notin L_x$

b)  $L_y = \{a^l c^m b^n a^l b^n c^m \mid l, m, n \geq 0\}$

Beispielsweise gilt:

- $acbabc \in L_y$
- $aa \in L_y$
- $cbbc \in L_y$
- $a \notin L_y$
- $abcabc \notin L_y$

### Hausaufgabe 10 (Abschlusseigenschaften kontextfreier Sprachen): (2 + 3 + 4 = 9 Punkte)

Sei  $\Sigma = \{a, b, c\}$  ein Alphabet. Zu welchen der drei Klassen

- deterministisch kontextfrei
- kontextfrei, aber nicht deterministisch kontextfrei
- nicht kontextfrei

gehören folgende Sprachen über  $\Sigma$ ? Beweisen Sie Ihre Antwort ausschließlich mit Hilfe der Abschlusseigenschaften (deterministisch) kontextfreier Sprachen, d.h. Sie dürfen nicht das Pumping-Lemma, CFGs oder Automaten verwenden. Sie dürfen jedoch verwenden, dass folgende Sprachen zu folgenden Klassen gehören:

- $L_1 = \{a^m b^m c^n \mid m, n \geq 0\}$  deterministisch kontextfrei
- $L_2 = \{a^m b^n c^n \mid m, n \geq 0\}$  deterministisch kontextfrei
- $L_3 = \{a^l b^m c^n \mid l, m, n \geq 0\}$  regulär
- $L_4 = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$  nicht kontextfrei
- $L_5 = \{w \in \Sigma^* \mid \#_a(w) \text{ ist gerade}\}$  regulär

Außerdem dürfen Sie verwenden, dass deterministisch kontextfreie Sprachen unter Schnitt mit regulären Sprachen abgeschlossen sind.

**a)**  $L_a = \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ enthält mindestens eines der Teilwörter } ba, cb, ac, ca \vee \#_a(w) \neq \#_b(w)\}$

Beispielsweise gilt:

- $aababb \in L_a$
- $abb \in L_a$
- $caabb \in L_a$
- $cc \notin L_a$
- $aabbc \notin L_a$

**b)**  $L_b = \{w \in \Sigma^* \mid \#_a(w) \text{ ist ungerade} \Rightarrow \#_a(w) = \#_b(w) = \#_c(w)\}$

Beispielsweise gilt:

- $acab \in L_b$
- $bb \in L_b$
- $abccababc \in L_b$
- $acc \notin L_b$
- $abbcc \notin L_b$

**c)**  $L_c = \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ enthält mindestens eines der Teilwörter } ba, cb, ac, ca \vee \#_a(w) \neq \#_b(w) \vee \#_b(w) \neq \#_c(w)\}$

Beispielsweise gilt:

- $caabb \in L_c$
- $cc \in L_c$
- $aabbc \in L_c$
- $aabbcc \notin L_c$