Übersicht

Übersicht

Reguläre Ausdrücke

Definition 2.1.1

Es sei Σ ein Alphabet.

1. $\varnothing$ *ist ein regulärer Ausdruck.*
2. ϵ *ist ein regulärer Ausdruck.*
3. a *ist ein regulärer Ausdruck, falls* $a \in \Sigma$.
4. $r\,s$ *ist ein regulärer Ausdruck, falls* r *und* s *reguläre Ausdrücke sind.*
5. $r + s$ *ist ein regulärer Ausdruck, falls* r *und* s *reguläre Ausdrücke sind.*
6. r^* *ist ein regulärer Ausdruck, falls* r *ein regulärer Ausdruck ist.*
7. (r) *ist ein regulärer Ausdruck, falls* r *ein regulärer Ausdruck ist.*

Definition 2.1.2

Es seien $A, B \subseteq \Sigma^*$ und $w \in \Sigma^*$.

- $A\,B = \{\, uv \mid u \in A \text{ und } v \in B \,\}$
- $w\,A = \{w\}\,A$ *und* $A\,w = A\,\{w\}$
- $A^i = \begin{cases} \{\epsilon\} & \text{falls } i = 0 \\ A & \text{falls } i = 1 \\ A\,A^{i-1} & \text{falls } i > 1 \end{cases}$
- $A^* = \bigcup_{n \geq 0} A^n$
- $A^+ = \bigcup_{n \geq 1} A^n$

Die Sprache eines regulären Ausdrucks

Definition 2.1.3

Wir ordnen jedem regulären Ausdruck r seine Sprache $L(r)$ zu:

1. $L(\emptyset) = \emptyset$
2. $L(\epsilon) = \{\epsilon\}$
3. $L(a) = \{a\}$
4. $L(r\,s) = L(r)\,L(s)$
5. $L(r + s) = L(r) \cup L(s)$
6. $L(r^*) = L(r)^*$
7. $L(\,(r)\,) = L(r)$

Beispiele

- $0^*(10^*10^*)^*$
  bezeichnet die Sprache aller Wörter über $\{0, 1\}$, die eine gerade Anzahl von 1en enthalten.

- 1^*0^*
  bezeichnet die Wörter über $\{0, 1\}$ die nicht 01 als Unterwort enthalten.

- $(0 + 1\,(0\,1^*\,0)^*\,1)^*$
  bezeichnet die durch drei teilbaren Binärzahlen.

Einige algebraische Gesetze

Satz 2.1.4

Es seien $A, B, C \subseteq \Sigma^*$.

1. $A\,(B\,C) = (A\,B)\,C$
2. $\epsilon\,A = A\,\epsilon = A$
3. $(A^*)^* = A^*$
4. $A\,(B \cup C) = A\,B \cup A\,C$
5. $(A \cup B)\,C = A\,C \cup B\,C$
6. $A^+ \cup \{\epsilon\} = A^*$

Reguläre Sprachen

Definition 2.1.5

*Eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ ist regulär,
falls es einen regulären Ausdruck r über Σ gibt mit $L = L(r)$.*

Die Klasse der regulären Sprachen besteht aus allen regulären Sprachen über allen Alphabeten.

Fragen:

Wieviele reguläre Sprachen gibt es über einem festen Alphabet?

Wieviele Sprachen gibt es insgesamt über einem festen Alphabet?

Antwort:

Es gibt nur abzählbar viele reguläre Sprachen, da es nur abzählbar viele reguläre Ausdrücke gibt.

Es gibt aber überabzählbar viele Sprachen bei festem Alphabet.

Die „meisten“ Sprachen sind also nicht regulär.

Abschlusseigenschaften regulärer Sprachen

Satz 2.1.6

Falls A und B reguläre Sprachen sind, dann auch

1. $A\,B$
2. $A \cup B$
3. A^*
4. A^+
5. $h(A)$ *falls* $A \subseteq \Sigma^*$ *und* $h\colon \Sigma^* \to \Gamma^*$ *ein Homomorphismus*

Was ist mit $A \cap B$ und $\Sigma^* \setminus A$?

Beweis.

r_A und r_B seien reguläre Ausdrücke für A und B.

1. $r_A\, r_B$ ist regulärer Ausdruck für $A\, B$
2. $r_A + r_B$ ist regulärer Ausdruck für $A \cup B$
3. r_A^* ist regulärer Ausdruck für A^*
4. $r_A\, r_A^*$ ist regulärer Ausdruck für A^+
5. Strukturelle Induktion über Aufbau regulärer Ausdrücke:
   - $r_A = \emptyset \longrightarrow r'_A = \emptyset$
   - $r_A = \epsilon \longrightarrow r'_A = \epsilon$
   - $r_A = a \longrightarrow r'_A = h(a)$
   - $r_A = r_{A_1}\, r_{A_2} \longrightarrow r'_A = r'_{A_1}\, r'_{A_2}$
   - $r_A = r_{A_1} + r_{A_2} \longrightarrow r'_A = r'_{A_1} + r'_{A_2}$
   - $r_A = r_{A_1}^* \longrightarrow r'_A = (r'_{A_1})^*$
   - $r_A = (r_{A_1}) \longrightarrow r'_A = (r'_{A_1})$

$\square$