Übersicht

Satz 2.9.1 (Pumping-Lemma)

Sei L eine reguläre Sprache. Dann gibt es $n \in \mathbf{N}$, so dass jedes Wort $w \in L$ mit $|w| \geq n$ in $w = x\,y\,z$ zerlegt werden kann mit

1. $|x\,y| \leq n$
2. $|y| > 0$
3. $x\,y^i\,z \in L$ *für alle* $i \geq 0$

Beweis.

Es sei $L = L(M)$ für einen DFA M mit n Zuständen.
Ist $|w| \geq n$, dann durchläuft M einen Zustand doppelt.
Sei p der erste solche Zustand.
Es gibt also $w = x\,y\,z$ mit

- $\hat{\delta}(q_0, x) = p$,
- $\hat{\delta}(p, y) = p$, $|x\,y| \leq n$, $|y| > 0$,
- $x\,y^i\,z \in L$

$\square$

Das Pumping-Lemma als Spiel

Gegeben sei eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$.

1. Alice wählt eine Zahl n.
2. Bob wählt ein Wort $w \in L$ mit $|w| \geq n$.
3. Alice wählt $x, y, z \in \Sigma^*$ mit $w = x\,y\,z$, $|x\,y| \leq n$, $|y| > 0$.
4. Bob wählt eine Zahl i.

Alice gewinnt, wenn $xy^iz \in L$.
Bob gewinnt, wenn $xy^iz \notin L$.

Falls L regulär ist, kann Alice immer gewinnen.
(Gewinnstrategie für Alice)

Falls Bob immer gewinnen kann, dann ist L nicht regulär.
(Gewinnstrategie für Bob)

Beispiel

Es sei $L = \{\, a^n\, b^n \mid n \geq 0 \,\}$.

1. Alice wählt eine Zahl n.
2. Bob wählt $w = a^n\, b^n$.
3. Alice wählt $x, y, z \in \{a, b\}^*$ mit $w = x\, y\, z$, $|x\, y| \leq n$, $|y| > 0$.
4. Bob wählt $i = 2$.

Bob hat gewonnen:

$x\, y\, y\, z$ enthält mehr Vorkommen von a als von b.

Also ist L nicht regulär.

Beispiel

Es sei $L = \{\, a^{n^3} \mid n \geq 0 \,\}$.

1. Alice wählt eine Zahl n.
2. Bob wählt $w = a^{m^3}$ mit $m = n + 3$.
3. Alice wählt $x, y, z \in a^*$ mit $w = x\,y\,z$, $|x\,y| \leq n$, $|y| > 0$.
4. Bob weiß: $x = a^r$, $y = a^s$, $z = a^t$ mit $r + s + t = m^3$.
   Bob wählt $i = 0$. Dann ist $x\,y^0\,z$ nicht in L:

$$(m-1)^3 = m^3-3m^2+3m-1 < m^3-m \leq |x\,y^0\,z| = r+t < m^3$$

Also ist L nicht regulär.