Übersicht

3 3 Kontextfreie Sprachen

- 3.1 Kontextfreie Sprachen und Grammatiken
- 3.2 Ableitungsbäume
- 3.3 Die *pre**-Operation
- 3.4 Entscheidungsprobleme für CFGs
- 3.5 Normalformen für CFGs
- 3.6 Chomsky-Normalform
- 3.7 Greibach-Normalform
- 3.8 Das Pumping-Lemma für CFLs
- 3.9 Kellerautomaten
- 3.10 Deterministische Kellerautomaten
- 3.11 Abschlusseigenschaften kontextfreier Sprachen

Definition 3.10.1

Ein PDA $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \Gamma_0, F)$ *ist ein DPDA, falls*

1. $|\delta(q, a, X)| \leq 1$ *für alle* $q \in Q, a \in \Sigma \cup \{\epsilon\}, X \in \Gamma$
2. *Falls* $\delta(q, a, X) \neq \varnothing$ *für ein* $q \in Q, a \in \Sigma, X \in \Gamma$, *dann ist* $\delta(q, \epsilon, X) = \varnothing$.

Eine Sprache L *ist eine deterministische CFL, falls es einen DPDA* M *gibt mit* $L(M) = L$. *Solche Sprachen heißen DCFL.*

Satz 3.10.2

DCFL ist unter Komplement abgeschlossen.

D.h. falls $L \in DCFL$, dann auch $\Sigma^* \setminus L \in DCFL$.

Frage: Warum ist der Beweis nicht trivial?

Lemma 3.10.3

Es sei $L \in DCFL$.

Dann gibt es einen DPDA M, der folgende Eigenschaften hat:

1. $L(M) = L$.
2. *Jede erreichbare Konfiguration (q, w, γ) hat eine Nachfolgekonfiguration, falls $w \neq \epsilon$.*
3. *Es gibt keine unendlichen Folgen $(q, \epsilon, \gamma) \vdash (q', \epsilon, \gamma') \vdash \cdots$*

Beweis.

1. Füge Fangzustand $q_\varnothing$ ein und ein zusätzliches Kellerbodensymbol, das nie entfernt wird.
2. Falls es unendliche Folge $(q, \epsilon, \gamma) \vdash (q', \epsilon, \gamma') \vdash \cdots$ gibt:
   - 1. Fall: $(q, \epsilon, Z) \not\overset{*}{\vdash}$ Endzustand

     $\delta(q, \epsilon, Z) := \{(q_\varnothing, Z)\}$, wobei $q_\varnothing$ der Fangzustand ist
   - 2. Fall: $(q, \epsilon, Z) \overset{*}{\vdash}$ Endzustand

     $\delta(q \ , \epsilon, Z) := \{(q_f, Z)\}$ (neuer Endzustand) und
     $\delta(q_f, \epsilon, Z) := \{(q_\varnothing, Z)\}$.

Wir haben jetzt einen PDA, der die ganze Eingabe liest.

(Er blockiert nie.) □

Beweis (des Theorems)

Ersetze Q durch $Q' = Q \times \{1,2,3\}$ und F durch $F' = Q \times \{3\}$ und δ durch δ':

- Falls $\delta(q,\epsilon,Z) = \{(p,\gamma)\}$

$$\begin{aligned} \delta'((q,1),\epsilon,Z) &:= \begin{cases} \{((p,1),\gamma)\} & \text{falls } p \notin F \\ \{((p,2),\gamma)\} & \text{falls } p \in F \end{cases} \\ \delta'((q,2),\epsilon,Z) &:= \quad \{((p,2),\gamma)\} \end{aligned}$$

- Falls $\delta(q,a,Z) = \{(p,\gamma)\}$ für $a \in \Sigma$

$$\begin{aligned} \delta'((q,1),\epsilon,Z) :=& \quad \{((q,3),Z)\} \\ \delta'((q,2),a,Z) = \delta'((q,3),a,Z) :=& \begin{cases} \{(p,1),\gamma\} & \text{falls } p \notin F \\ \{(p,2),\gamma\} & \text{falls } p \in F \end{cases} \end{aligned}$$

- Neuer Startzustand: $(q_0,1)$ falls $q_0 \in F$, $(q_0,2)$ sonst.