Übersicht

3 Kontextfreie Sprachen
- 3.1 Kontextfreie Sprachen und Grammatiken
- 3.2 Ableitungsbäume
- 3.3 Die *pre**-Operation
- 3.4 Entscheidungsprobleme für CFGs
- 3.5 Normalformen für CFGs
- 3.6 Chomsky-Normalform
- 3.7 Greibach-Normalform
- 3.8 Das Pumping-Lemma für CFLs
- 3.9 Kellerautomaten
- 3.10 Deterministische Kellerautomaten
- 3.11 Abschlusseigenschaften kontextfreier Sprachen

Satz 3.11.1

Es seien L und L' kontextfreie und R eine reguläre Sprache. Dann sind $L \cap R$, $L \setminus R$, $L \cup L'$, $L\,L'$ und L^* wieder kontextfreie Sprachen.

Beweis.

Schnitt und Differenz: Produktautomat.

Vereinigung: $G_1 = (N, T, P_1, S_1)$ und $G_2 = (N, T, P_2, S_2)$.
$G = (N, T, P_1 \cup P_2 \cup \{S \to S_1 \mid S_2\}, S)$, $L(G) = L(G_1) \cup L(G_2)$.

Konkatenation: $G_1 = (N, T, P_1, S_1)$ und $G_2 = (N, T, P_2, S_2)$.
$G = (N, T, P_1 \cup P_2 \cup \{S \to S_1 S_2\}, S)$, $L(G) = L(G_1)L(G_2)$.

Kleene'sche Hülle: $G_1 = (N, T, P_1, S_1)$.
$G = (N, T, P_1 \cup \{S \to \epsilon \mid SS \mid S_1\}, S)$, $L(G) = L(G_1)^*$. □

Satz 3.11.2

CFL ist nicht unter Schnitt abgeschlossen und damit auch nicht unter Komplement.

Beweis.

- $L_1 = \{\, a^i\, b^j\, c^j \mid i,j \geq 1 \,\}$
- $L_2 = \{\, a^i\, b^i\, c^j \mid i,j \geq 1 \,\}$

L_1 und L_2 sind (deterministisch) kontextfrei.

$L_1 \cap L_2 = \{\, a^i\, b^i\, c^i \mid i \geq 1 \,\}$ ist bekanntlich nicht kontextfrei (Pumping-Lemma).

Wären kontextfreie Sprachen unter Komplement abgeschlossen:

- $\overline{L_1}$ und $\overline{L_2}$ kontextfrei
- $\overline{L_1} \cup \overline{L_2}$ kontextfrei
- $\overline{\overline{L_1} \cup \overline{L_2}} = L_1 \cap L_2$ kontextfrei. Widerspruch! $\square$

Satz 3.11.3

DCFL ist nicht unter Schnitt und daher auch nicht unter Vereinigung abgeschlossen.

Beweis.

- $L_1 = \{ a^i \, b^j \, c^j \mid i,j \geq 1 \}$
- $L_2 = \{ a^i \, b^i \, c^j \mid i,j \geq 1 \}$

L_1 und L_2 sind deterministisch kontextfrei.

$L_1 \cap L_2 = \{ a^i \, b^i \, c^i \mid i \geq 1 \}$ ist bekanntlich nicht kontextfrei (Pumping-Lemma).

Wären det. kontextfreie Sprachen unter Vereinigung abgeschlossen:

- $\overline{L_1}$ und $\overline{L_2}$ deterministisch kontextfrei
- $\overline{L_1} \cup \overline{L_2}$ deterministisch kontextfrei
- $\overline{\overline{L_1} \cup \overline{L_2}} = L_1 \cap L_2$ deterministisch kontextfrei. Widerspruch! $\square$