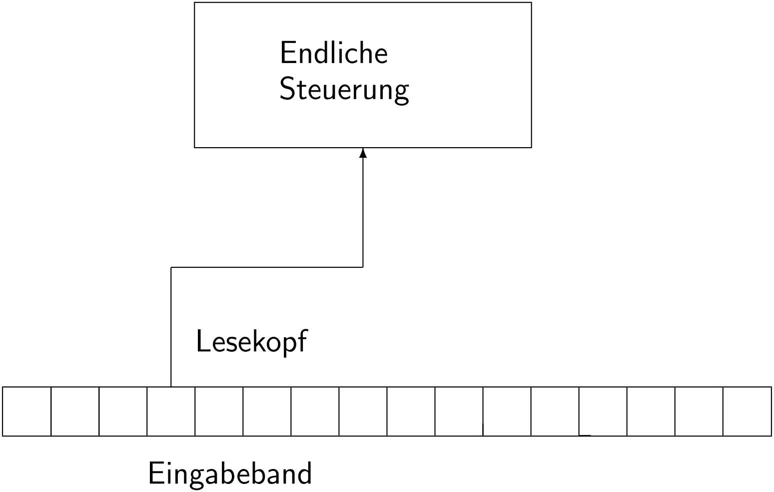
Übersicht

Definition 3.9.1

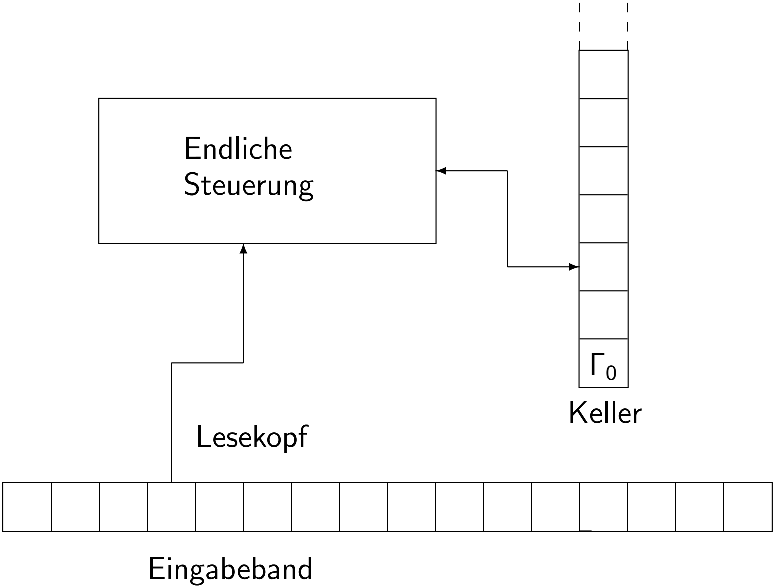
Ein Kellerautomat (PDA) $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \Gamma_0, F)$ *ist ein 7-Tupel. Hierbei ist:*

- Q *die endliche Menge der Zustände*
- Σ *das Eingabealphabet*
- Γ *das Kelleralphabet*
- $\delta\colon Q \times (\Sigma \cup \{\epsilon\}) \times \Gamma \to 2^{Q \times \Gamma^*}$, *wobei* $\delta(q, a, X)$ *stets eine endliche Menge von Paaren ist, die Übergangsfunktion*
- $q_0 \in Q$ *der Startzustand*
- $\Gamma_0 \in \Gamma$ *das Kellerbodensymbol*
- $F \subseteq Q$ *die Menge der Endzustände*

Endliche Automaten (NFA)



Kellerautomaten (PDA)



Konfigurationen

Definition 3.9.2

Eine Konfiguration eines PDA ist ein Tripel (q, w, γ), *wobei*

- $q \in Q$ *ein Zustand,*
- w *das noch zu lesende Wort und*
- γ *der Kellerinhalt ist.*

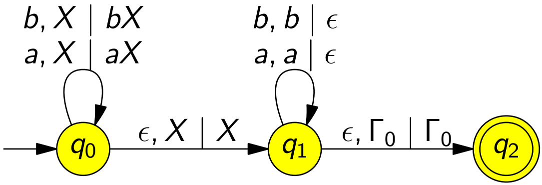
Wir schreiben

$$(q, a\,w, X\,\beta) \vdash (p, w, \alpha\,\beta)$$

falls $(p, \alpha) \in \delta(q, a, X)$, *wobei* $a \in \Sigma \cup \{\epsilon\}$, $X \in \Gamma$.

$(p, w, \alpha\,\beta)$ *ist eine Nachfolgekonfiguration von* $(q, a\,w, X\beta)$.

Beispiel



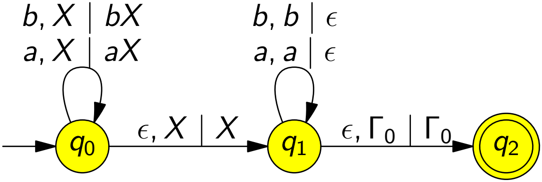
$$
\begin{aligned}
(q_0, abba, \Gamma_0) &\vdash (q_0, bba, a\Gamma_0) \\
&\vdash (q_0, ba, ba\Gamma_0) \\
&\vdash (q_1, ba, ba\Gamma_0) \\
&\vdash (q_1, a, a\Gamma_0) \\
&\vdash (q_1, \epsilon, \Gamma_0) \\
&\vdash (q_2, \epsilon, \Gamma_0)
\end{aligned}
$$

Definition 3.9.3

Es sei $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \Gamma_0, F)$ *ein PDA.*

- *Für ein Eingabewort* w *ist die Startkonfiguration* (q_0, w, Γ_0).
- $\overset{*}{\vdash}$ *ist die reflexiv-transitive Hülle von* $\vdash$.
- *Die von* M *durch Endzustand akzeptierte Sprache* $L(M)$ *ist*

$$\{\, w \in \Sigma^* \mid (q_0, w, \Gamma_0) \overset{*}{\vdash} (q, \epsilon, \beta) \text{ für ein } q \in F \text{ und } \beta \in \Gamma^* \,\}.$$



$$
\begin{aligned}
(q_0, abba, \Gamma_0) &\vdash (q_0, bba, a\Gamma_0) \\
&\vdash (q_0, ba, ba\Gamma_0) \\
&\vdash (q_1, ba, ba\Gamma_0) \\
&\vdash (q_1, a, a\Gamma_0) \\
&\vdash (q_1, \epsilon, \Gamma_0) \\
&\vdash (q_2, \epsilon, \Gamma_0)
\end{aligned}
$$

Startkonfiguration: $(q_0, abba, \Gamma_0)$

abba wird akzeptiert.

Definition 3.9.4

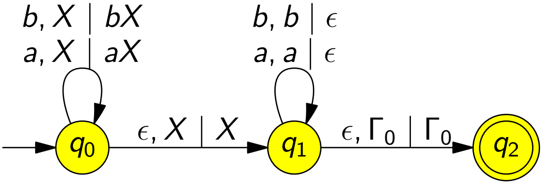
Es sei $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \Gamma_0, F)$ *ein PDA.*

Die von M *durch leeren Keller akzeptierte Sprache* $N(M)$ *ist*

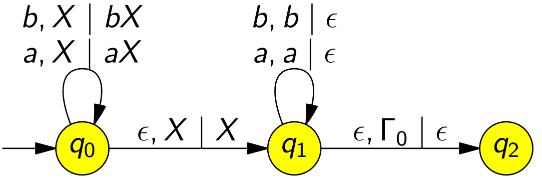
$$N(M) = \{\, w \in \Sigma^* \mid (q_0, w, \Gamma_0) \overset{*}{\vdash} (p, \epsilon, \epsilon) \text{ für ein } p \in Q\}$$

(F spielt keine Rolle und kann weggelassen werden.)

Beispiel



$L(M) = \{ ww^R \mid w \in \{a, b\}^* \}$, aber $N(M) = \varnothing$.



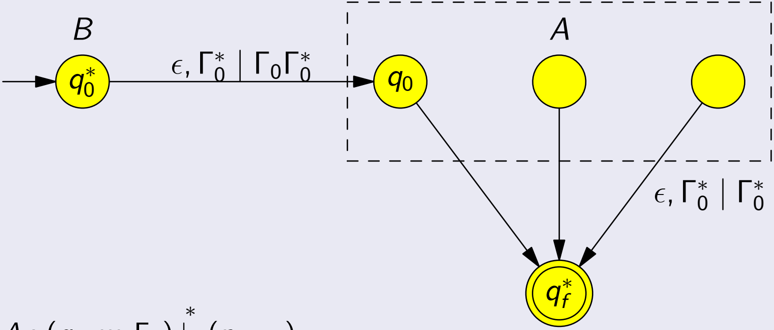
$N(M) = \{ ww^R \mid w \in \{a, b\}^* \}$, aber $L(M) = \varnothing$.

Satz 3.9.5

Für einen PDA $A = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \Gamma_0)$ *gibt es einen PDA* B *mit* $L(B) = N(A)$.

Beweis.

Verwende $B = (Q \cup \{q_0^*, q_f^*\}, \Sigma, \Gamma \cup \{\Gamma_0^*\}, \delta_B, q_0^*, \Gamma_0^*, \{q_f^*\})$



$$A : (q_0, w, \Gamma_0) \overset{*}{\underset{A}{\vdash}} (p, \epsilon, \epsilon)$$

$$B : (q_0^*, w, \Gamma_0^*) \underset{B}{\vdash} (q_0, w, \Gamma_0\Gamma_0^*) \overset{*}{\underset{A}{\vdash}} (p, \epsilon, \Gamma_0^*) \underset{B}{\vdash} (q_f^*, \epsilon, \Gamma_0^*)$$

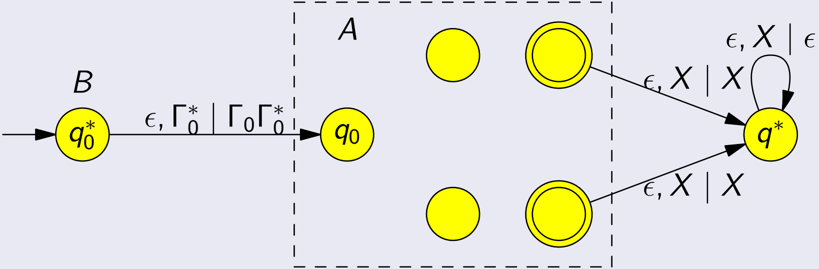
□

Satz 3.9.6

Für einen PDA $A = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \Gamma_0, F)$ *gibt es einen PDA* B *mit* $N(B) = L(A)$.

Beweis.

$B = (q \cup \{q^*, q_0^*\}, \Sigma, \Gamma \cup \{\Gamma_0^*\}, \delta_B, q_0^*, \Gamma_0^*)$



B arbeitet wie A, kann aber von Endzuständen spontan nach q^*, wo der Keller geleert wird. □

Satz 3.9.7

Es sei $G = (N, T, P, S)$ eine CFG ohne ϵ-Produktionen. Dann gibt es einen PDA M mit $N(M) = L(G)$.

Beweis.

$M = (\{q\}, T, N \cup T, \delta, q, S)$ wobei

- $\delta(q, a, a) = \{(q, \epsilon)\}$ für alle $a \in T$
- $\delta(q, \epsilon, A) = \{\, (q, \alpha) \mid A \to \alpha \in P \,\}$ für alle $A \in N$.

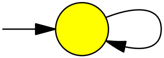
Behauptung:

$(q, w, S) \overset{*}{\vdash} (q, \epsilon, \epsilon)$ gdw. $S \overset{*}{\Rightarrow} w$ □

Beispiel

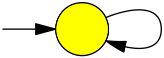
$$S \longrightarrow aSa \mid bSb \mid a \mid b$$

Zugehöriger PDA:



$$\begin{array}{r|l} \epsilon, S & aSa \\ \epsilon, S & bSb \\ \epsilon, S & a \\ \epsilon, S & b \\ a, a & \epsilon \\ b, b & \epsilon \end{array}$$

bzw.



$$\begin{array}{r|l} a, S & Sa \\ b, S & Sb \\ a, S & \epsilon \\ b, S & \epsilon \\ a, a & \epsilon \\ b, b & \epsilon \end{array}$$

Das Kellerbodensymbol ist S.

Satz 3.9.8

Es sei $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \Gamma_0)$ *ein PDA.*

Dann gibt es eine CFG G *mit* $L(G) = N(M)$.

Beweis.

Für jedes $p \in Q$ erzeuge eine Grammatik $G_p = (N, \Sigma, P, [q_0, \Gamma_0, p])$ wobei $N = \{[q, Z, r] | q, r \in Q, Z \in \Gamma\}$. P enthält folgende Regeln:

$$[q, Z, q_k] \to a[r, X_1, q_1][q_1, X_2, q_2] \cdots [q_{k-1}, X_k, q_k]$$

falls

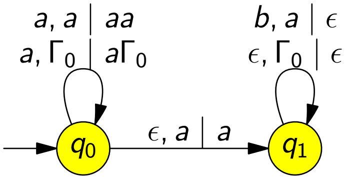
- $(r, \gamma) \in \delta(q, a, Z)$ mit $a \in \Sigma \cup \{\epsilon\}$
- $\gamma = X_1 \cdots X_k$ mit $X_i \in \Gamma$
- $q_i \in Q$ (alle Möglichkeiten!)

Spezialfall: $[q, Z, r] \to a$ falls $\gamma = \epsilon$.

Es gilt $(q_0, w, \Gamma_0) \overset{*}{\vdash} (p, \epsilon, \epsilon)$ gdw. $[q_0, \Gamma_0, p] \overset{*}{\Rightarrow} w$ d.h.

$$N(M) = \bigcup_{p \in Q} L(G_p).$$

Beispiel



$$
\begin{aligned}
[q_0, \Gamma_0, q_1] &\to a[q_0, a, q_1][q_1, \Gamma_0, q_1] \\
[q_0, a, q_1] &\to [q_1, a, q_1] \\
[q_1, a, q_1] &\to b \\
[q_1, \Gamma_0, q_1] &\to \epsilon
\end{aligned}
$$

$$[q_0, \Gamma_0, q_1] \Rightarrow a[q_0, a, q_1][q_1, \Gamma_0, q_1] \overset{*}{\Rightarrow} a\, b[q_1, \Gamma_0, q_1] \Rightarrow a\, b$$