μ–recursive Functions

1. $\mathsf{null}_n(k_1, \ldots, k_n) = 0$

2. $\mathsf{succ}(k) = k + 1$

3. $\mathsf{proj}_{n,i}(k_1, \ldots, k_n) = k_i$

4. $g(k_1, \ldots, k_n) = f(f_1(k_1, \ldots, k_n), \ldots, f_m(k_1, \ldots, k_n))$

5. $$\begin{aligned} h(k_1, \ldots, k_n, 0) &= f(k_1, \ldots, k_n) \\ h(k_1, \ldots, k_n, k+1) &= g(k_1, \ldots, k_n, k, h(k_1, \ldots, k_n, k)) \end{aligned}$$

6. $g(k_1, \ldots, k_n) = k$ iff $f(k_1, \ldots, k_n, k) = 0$ and
   for all $0 \leq k' < k$,
   $f(k_1, \ldots, k_n, k')$ is defined and
   $f(k_1, \ldots, k_n, k') > 0$

Example plus

$$\begin{array}{rcl} \mathsf{f}(x,y,z) & = & \mathsf{succ}(\mathsf{proj}_{3,3}(x,y,z)) \\ \mathsf{plus}(x,0) & = & \mathsf{proj}_{1,1}(x) \\ \mathsf{plus}(x,y+1) & = & \mathsf{f}(x,y,\mathsf{plus}(x,y)) \end{array}$$

Example div

$$\begin{array}{lll} \mathsf{div}(x,y) = z & \text{iff} & \mathsf{i}(x,y,z) = 0 \text{ and} \\ & & \text{for all } 0 \leq z' < z,\ \mathsf{i}(x,y,z') \text{ is defined} \\ & & \text{and } \mathsf{i}(x,y,z') > 0 \end{array}$$

Here, $\mathsf{i}(x,y,z) = x - y \cdot z$, i.e.,

$$\begin{array}{rcl} \mathsf{i}(x,y,z) & = & \mathsf{minus}(\mathsf{proj}_{3,1}(x,y,z),\mathsf{j}(x,y,z)) \\ \mathsf{j}(x,y,z) & = & \mathsf{times}(\mathsf{proj}_{3,2}(x,y,z),\mathsf{proj}_{3,3}(x,y,z)) \end{array}$$