Constraint Signature: $(\Sigma, \Delta, \Sigma', \Delta')$ with

- $\mathsf{true}, \mathsf{fail} \in \Delta_0$ and $= \in \Delta_2$
- $\Sigma' \subseteq \Sigma$ and $\Delta' \subseteq \Delta$
- Δ' does not contain true, fail, or $=$

Constraints: $\mathcal{A}t(\Sigma', \Delta', \mathcal{V}) \quad \cup \quad \mathcal{A}t(\Sigma, \{=\}, \mathcal{V}) \quad \cup \quad \{\mathsf{true}, \mathsf{fail}\}$

Example: $\Sigma' = \Sigma_{FD}, \quad \Delta' = \Delta_{FD}$ with

$$\begin{array}{rcl} \Sigma'_0 & = & \mathbb{Z} \\ \Sigma'_1 & = & \{-, \mathsf{abs}\} \\ \Sigma'_2 & = & \{+, -, *, /, \mathsf{mod}, \mathsf{min}, \mathsf{max}\} \\ \Delta'_2 & = & \{\#\text{>=},\ \#\text{=<},\ \#\text{=},\ \#\backslash\text{=},\ \#\text{>},\ \#\text{<}\} \end{array}$$

```
fact(0,1).
fact(X,Y) :- X #> 0, X1 #= X-1, fact(X1,Y1), Y #= X*Y1.
```

```
fac(0,1).
fac(X,Y) :- X > 0, X1 is X-1, fac(X1,Y1), Y is X*Y1.
```

```
add(X,0,X).
add(X,s(Y),s(Z)) :- add(X,Y,Z).
```

$$
\begin{array}{ll}
 & (\neg \mathsf{add}(\mathsf{s}(0), \mathsf{s}(0), U),\ \varnothing) \\
\vdash_{\mathcal{P}} & (\neg \mathsf{add}(\mathsf{s}(0), 0, Z),\ \{X/\mathsf{s}(0),\ Y/0,\ U/\mathsf{s}(Z)\}) \\
\vdash_{\mathcal{P}} & (\Box,\ \underbrace{\{X'/\mathsf{s}(0),\ Z/\mathsf{s}(0)\} \circ \{X/\mathsf{s}(0),\ Y/0,\ U/\mathsf{s}(Z)\}}_{\{X'/\mathsf{s}(0),\, Z/\mathsf{s}(0),\, X/\mathsf{s}(0),\, Y/0,\, U/\mathsf{s}(\mathsf{s}(0))\}})
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
 & (\neg \mathsf{add}(\mathsf{s}(0), \mathsf{s}(0), U),\ \mathsf{true}) \\
\vdash_{\mathcal{P}} & (\neg \mathsf{add}(X, Y, Z),\ \overline{\mathsf{add}(\mathsf{s}(0), \mathsf{s}(0), U) = \mathsf{add}(X, \mathsf{s}(Y), \mathsf{s}(Z))}) \\
\vdash_{\mathcal{P}} & (\Box,\ \overline{\mathsf{add}(X, Y, Z) = \mathsf{add}(X', 0, X')} \wedge \overline{\mathsf{add}(\mathsf{s}(0), \mathsf{s}(0), U) = \mathsf{add}(X, \mathsf{s}(Y), \mathsf{s}(Z))})
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
 & (\neg \mathsf{add}(\mathsf{s}(0), \mathsf{s}(0), U),\ \mathsf{true}) \\
\vdash_{\mathcal{P}} & (\neg \mathsf{add}(X, Y, Z),\ \underbrace{\overline{\mathsf{add}(\mathsf{s}(0), \mathsf{s}(0), U) = \mathsf{add}(X, \mathsf{s}(Y), \mathsf{s}(Z))}}_{\mathsf{s}(0)=X \,\wedge\, \mathsf{s}(0)=\mathsf{s}(Y) \,\wedge\, U=\mathsf{s}(Z)}) \\
\vdash_{\mathcal{P}} & (\Box,\ \underbrace{\overline{\mathsf{add}(X, Y, Z) = \mathsf{add}(X', 0, X')}}_{X=X' \,\wedge\, Y=0 \,\wedge\, Z=X'} \ \wedge\ \mathsf{s}(0) = X\ \wedge\ \mathsf{s}(0) = \mathsf{s}(Y)\ \wedge\ U = \mathsf{s}(Z))
\end{array}
$$

There is a computation step $(G_1, CO_1) \vdash_{\mathcal{P}} (G_2, CO_2)$ iff

$G_1 = \{\neg A_1, \ldots, \neg A_k\}$ with $k \geq 1$ and one of (A) or (B) holds:

(A) Some A_i is not a constraint. Then:

- there exists a $K \in \mathcal{P}$ with $\nu(K) = \{B, \neg C_1, \ldots, \neg C_n\}$ such that
    - $\nu(K)$ has no common variables with G_1 or CO_1
    - $CT \cup \{\forall X \; X = X, \text{true}\} \models \exists \, (CO_1 \wedge \overline{A_i = B})$
- $G_2 = \{\neg A_1, \ldots, \neg A_{i-1}, \neg C_1, \ldots, \neg C_n, \neg A_{i+1}, \ldots, \neg A_k\}$
- $CO_2 = CO_1 \wedge \overline{A_i = B}$

(B) Some A_i is a constraint. Then:

- $CT \cup \{\forall X \; X = X, \text{true}\} \models \exists \; CO_1 \wedge A_i$
- $G_2 = \{\neg A_1, \ldots, \neg A_{i-1}, \neg A_{i+1}, \ldots, \neg A_k\}$
- $CO_2 = CO_1 \wedge A_i$

$$P[\![\mathcal{P}, CT, G]\!] = \{\sigma(A_1 \wedge \ldots \wedge A_k) \mid (G, \text{true}) \vdash_{\mathcal{P}}^{+} (\Box, CO), \; \sigma \text{ is ground substitution with } CT \cup \{\forall X \; X = X, \text{true}\} \models \sigma(CO)\}$$