Informatik I - Programmierung
Globalübung
11.11.2003

Hoare-Kalkül

Thomas Weiler

Fachgruppe Informatik
RWTH Aachen

Ariane 5

- Die Ariane 5 ist das jüngste Modell der Trägerrakete Ariane der europäischen Weltraumorganisation ESA.
- Mit 4 CLUSTER-Satelliten beladen, sollte die Ariane 501 am 4. Juni 1996 ihren Jungfernflug starten. Dieser endete ca. 40 Sekunden nach dem Start mit einer Explosion der Trägerrakete
- 250 Mio. DM Startkosten
- 850 Mio. DM Cluster-Satelliten
- 600 Mio. DM für nachfolgende Verbesserungen
- Verdienstausfall für 2 bis 3 Jahre

(Quelle: http://wwwzenger.informatik.tu-muenchen.de/lehre/seminare/semsoft/unterlagen_02/ariane/website/Ariane.Htm und http://www-aix.gsi.de/~giese/swr/ariane5.html)

Was war passiert?

- 37 Sekunden nach Zünden der Rakete erreichte Ariane 5 in 3700 m Flughöhe eine Horizontal-Geschwindigkeit von 32768.0 (interne Einheiten).
- Dieser Wert lag etwa fünfmal höher als bei Ariane 4. Die Umwandlung in eine ganze Zahl führte zu einem Überlauf, der jedoch nicht abgefangen wurde.
- Nur bei 3 von 7 Variablen wurde ein Überlauf geprüft - für die anderen 4 Variablen existierten Beweise, dass die Werte klein genug bleiben würden (Ariane 4).
- Diese Beweise galten jedoch nicht für die Ariane 5 und wurden dafür auch gar nicht nachvollzogen.

(Quelle: http://wwwzenger.informatik.tu-muenchen.de/lehre/seminare/semsoft/unterlagen_02/ariane/website/Ariane.Htm und http://www-aix.gsi.de/~giese/swr/ariane5.html)

Software und Fehler

- **Wunsch: Fehlerfreie Software**
- **Realität: Software enthält Fehler**
- **Garantiert fehlerfreie Software bislang nicht realisierbar**

Qualitätssicherung

Analytische Maßnahmen

Ergebnisse kontrollieren
Erkannte Fehler korrigieren

Beispiele:
Review
Test
Verifikation

Konstruktive / Organisatorische Maßnahmen

Fehler verhindern
Fehler vermeiden

Beispiele:
Code-Richtlinien
Verwendung von Standards

Verifikation - 1

- **Spezifikation: Angabe, *was* ein Programm tun soll**
  - natürliche Sprache
  - grafische Sprachen (UML, ...)
  - logische Sprachen (Z, VDM, ...)

- **Testen: Überprüfung für endlich viele Eingaben**

  ⇒ keine 100% Sicherheit

- **Verifikation: Mathematischer Beweis der Korrektheit**
  - Terminierung: Hält Programm immer an?
  - Partielle Korrektheit: Falls Programm anhält, erfüllt es Spezifikation?
  - Totale Korrektheit: Terminierung & Partielle Korrektheit

  ⇒ Semantik der Programmiersprache

Verifikation - 2

Programm P

```
i = n;
res = 1;
while (i > 1) {
   res = res * i;
   i = i - 1;
}
```

- **Spezifikation:**
  Programm berechnet (in `res`) Fakultät von `n`
- **Terminierung:**
  Programm hält an, weil `i` in jedem Schleifendurchlauf kleiner wird
- **Partielle Korrektheit:**
  Nach Ausführung ist `res` = `n`!
- **Totale Korrektheit**

Wie beweist man so etwas ?

⇒ Verifikation nötig bei sicherheitskritischen Anwendungen

⇒ hilft für Programmentwurf und Programmierstil

Partielle Korrektheit: Hoare-Kalkül

- **Spezifikation (zur partiellen Korrektheit)**

  $\langle \varphi \rangle$ **P** $\langle \psi \rangle$

  Wenn vor Ausführung von P Vorbedingung φ gilt

  und Ausführung von P terminiert,

  dann gilt hinterher Nachbedingung ψ.

- **Bsp:** `<n >= 0>` P `<res = n!>`

- Partielle Korrektheit ist *semantische* Aussage

  Hoare-Kalkül: 7 *syntaktische* Regeln zur Herleitung von Korrektheitsaussagen

Zuweisungsregel

$$\frac{}{\langle \varphi\,[x/t] \rangle\ \texttt{x = t;}\ \langle \varphi \rangle}$$

x ist Variable, **t** ist Ausdruck (ohne Seiteneffekte),
φ **[x/t]** ist φ mit allen **x** ersetzt durch **t**

Bsp: <5 = 5> x = 5; <x = 5>

<5 = 5>

x = 5;

<x = 5>

Sequenzregel

$$\frac{\langle \varphi \rangle\ P\ \langle \psi \rangle \qquad \langle \psi \rangle\ Q\ \langle \beta \rangle}{\langle \varphi \rangle\ P\ Q\ \langle \beta \rangle}$$

Bsp: <true>

```
        x = 5;
        res = x * x + 6;
```

<res = 31>

<true>
<5 = 5>

x = 5;

<x = 5>
<x * x + 6 = 31>

res = x * x + 6;

<res = 31>

Konsequenzregel 1 (Stärkere Vorbedingung)

$$\frac{\langle \varphi \rangle \; P \; \langle \psi \rangle \qquad \alpha \Rightarrow \varphi}{\langle \alpha \rangle \; P \; \langle \psi \rangle}$$

Bsp: `<true>  x = 5;  <x = 5>`, denn:

$$\frac{\texttt{<5 = 5>}\ \texttt{x = 5;}\ \texttt{<x = 5>} \qquad \texttt{true} \Rightarrow \texttt{5 = 5}}{\texttt{<true>}\ \ \texttt{x = 5;}\ \ \texttt{<x = 5>}}$$

```
<true>
<5 = 5>
x = 5;
<x = 5>
```

Konsequenzregel 2 (Schwächere Nachbedg.)

$$\frac{\langle\varphi\rangle\ P\ \langle\psi\rangle \qquad \psi \Rightarrow \beta}{\langle\varphi\rangle\ P\ \langle\beta\rangle}$$

Bsp: $\langle true\rangle$ `x = 5;` $\langle x \geq 5\rangle$, denn:

$$\frac{\langle true\rangle\ x = 5;\ \langle x = 5\rangle \qquad x = 5 \Rightarrow x \geq 5}{\langle true\rangle\ x = 5;\ \langle x \geq 5\rangle}$$

$\langle true\rangle$
$\langle 5 = 5\rangle$
`x = 5;`
$\langle x = 5\rangle$
$\langle x \geq 5\rangle$

Bedingungsregel 1

$$\frac{\langle \varphi \wedge B \rangle \ P \ \langle \psi \rangle \qquad \varphi \wedge \neg B \Rightarrow \psi}{\langle \varphi \rangle \ \texttt{if (B) \{P\}} \ \langle \psi \rangle}$$

Bsp: $\langle true \rangle$

```
        res = y;
        if (x > y) res = x;
```

$\langle res = max(x,y) \rangle$

denn: $\langle res = y \wedge x > y \rangle$

$\langle x = max(x,y) \rangle$

```
        res = x;
```

$\langle res = max(x,y) \rangle$

und $\langle res = y \wedge \neg x > y \rangle$

$\Rightarrow \langle res = max(x,y) \rangle$

$\langle true \rangle$

$\langle y = y \rangle$

```
res = y;
```

$\langle res = y \rangle$

```
if (x > y) res = x;
```

$\langle res = max(x,y) \rangle$

Bedingungsregel 2

$$\frac{\langle \varphi \wedge B \rangle\ P\ \langle \psi \rangle \qquad \langle \varphi \wedge \neg B \rangle\ Q\ \langle \psi \rangle}{\langle \varphi \rangle\ \texttt{if (B) \{P\} else \{Q\}}\ \langle \psi \rangle}$$

Bsp: <true>

```
        if (x < 0)
            res = -x;
        else
            res = x;
```

<res = |x|>

denn: <x < 0>
<-x = |x|>

```
            res = -x;
```

<res = |x|>

und <¬ x < 0>
<x = |x|>

```
            res = x;
```

<res = |x|>

Schleifenregel (1)

$$\frac{\langle \varphi \wedge B \rangle \; P \; \langle \varphi \rangle}{\langle \varphi \rangle \; \texttt{while (B) \{P\}} \; \langle \varphi \wedge \neg B \rangle}$$

```
Bsp.: (Berechnung der Fakultät von n)

<n >= 0>
i = n;
res = 1;
while (i > 1) {
  res = res * i;
  i = i - 1;
}
<res = n!>
```

Schleifenregel (2)

$$\frac{\langle \varphi \wedge B \rangle \; P \; \langle \varphi \rangle}{\langle \varphi \rangle \; \texttt{while (B) \{P\}} \; \langle \varphi \wedge \neg B \rangle}$$

```
Zu zeigen:

<n >= 0>
i = n;
res = 1;
<φ >
while (i > 1) {
  <φ ∧ (i > 1)>
  res = res * i;
  i = i - 1;
  <φ >
}
<φ ∧ ¬(i > 1)>
<res = n!>
```

Problem:
Wie finden wir die Schleifeninvariante φ ?

Vorgehen:
Betrachte Wert der verwendeten Variablen (hier für n = 4)

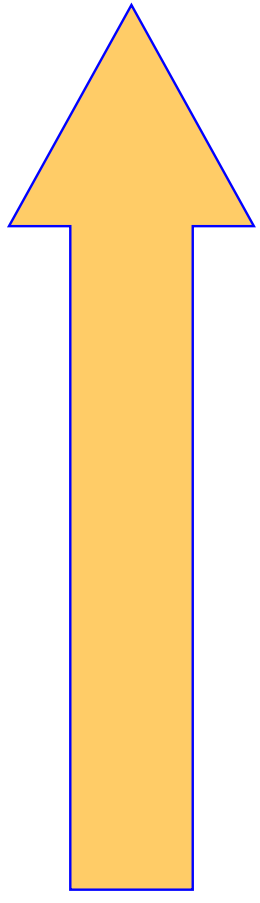
res	i	n
1	4	4
4	3	4
12	2	4
24	1	4

$\varphi \equiv (\text{res} * i! = n!) \wedge (i >= 0)$

Schleifenregel (3)

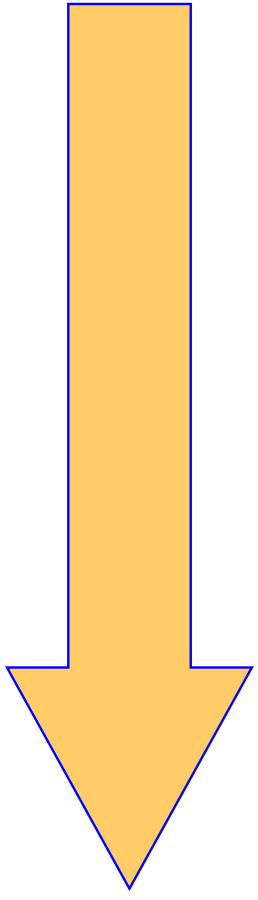
```
<n >= 0>
<(1 * n! = n!) ∧ (n >= 0)>
i = n;
<(1 * i! = n!) ∧ (i >= 0)>
res = 1;
<(res * i! = n!) ∧ (i >= 0)>
while (i > 1) {
  <(res * i! = n!) ∧ (i >= 0) ∧ (i > 1)>
  <(res * i! = n!) ∧ (i >= 1)>
  <((res * i) * (i-1)! = n!) ∧ ((i-1) >= 0)>
  res = res * i;
  <(res * (i-1)! = n!) ∧ ((i-1) >= 0)>
  i = i - 1;
  <(res * i! = n!) ∧ (i >= 0)>
}
<(res * i! = n!) ∧ (i >= 0) ∧ ¬(i > 1)>
<(res * i! = n!) ∧ (i >= 0) ∧ (i <= 1)>
<res = n!>
```

Zu zeigen: rot
Beweisschritte: blau



Schleifenregel (4)

```
<n >= 0>
<n >= 0 ∧ n = n>
i = n;
<i >= 0 ∧ i = n>
<i >= 0 ∧ i = n ∧ 1 = 1>
res = 1;
<i >= 0 ∧ i = n ∧ res = 1>
<(res * i! = n!) ∧ (i >= 0)>
while (i > 1) {
  <(res * i! = n!) ∧ (i >= 0) ∧ (i > 1)>
  <(res * i! = n!) ∧ (i > 0)>
  <((res * i) * (i-1)! = n!) ∧ (i > 0)>
  res = res * i;
  <(res * (i-1)! = n!) ∧ (i > 0)>
  <(res * (i-1)! = n!) ∧ (i - 1 >= 0)>
  i = i - 1;
  <(res * i! = n!) ∧ (i >= 0)>
}
<(res * i! = n!) ∧ (i >= 0) ∧ ¬(i > 1)>
<(res * i! = n!) ∧ (i >= 0) ∧ (i <= 1)>
<res = n!>
```



Terminierung

Für jede Schleife **`while (B) {P}`** finde einen **`int`**-Ausdruck V (*Variante* der Schleife), so dass:

$B \Rightarrow V \geq 0$ und $\langle V = m \wedge B \rangle\ P\ \langle V < m \rangle$

```
while (i > 1) {
  res = res * i;
  i = i - 1;
}

Behauptung: Variante ist i
```

Zu zeigen:

1. $B \Rightarrow V \geq 0$

   `i > 1 ⇒ i ≥ 0`

2. $\langle V = m \wedge B \rangle\ P\ \langle V < m \rangle$

   ```
   <i = m ∧ i > 1>
   <i-1 < m>
   res = res * i;
   <i-1 < m>
    i = i - 1;
   <i < m>
   ```

Potenzierung (Algorithmus)

Eingabe: b, e mit e >= 0

Ausgabe: erg = b ^ e

```
int bas = b;
int exp = e;
int erg = 1;
while (exp > 0) {
   if (exp % 2 == 1) {
      erg = erg * bas;
   }
   bas = bas * bas;
   exp = exp / 2;
}
```

Ganzzahlige Division in JAVA, falls Dividend und Divisor (wie hier) int-Werte sind.

Potenzierung (Partielle Korrektheit - 1)

```
<e >= 0>
int bas = b;
int exp = e;
int erg = 1;
<φ>
while (exp > 0) {
   <φ ∧ (exp > 0)>
   if (exp % 2 == 1) {
      erg = erg * bas;
   }
   bas = bas * bas;
   exp = exp / 2;
   <φ>
}
<φ ∧ ¬ (exp > 0)>
<erg = b ^ e>
```

b	e	bas	exp	erg
2	9	2	9	1
2	9	4	4	2
2	9	16	2	2
2	9	256	1	2
2	9	65536	0	512

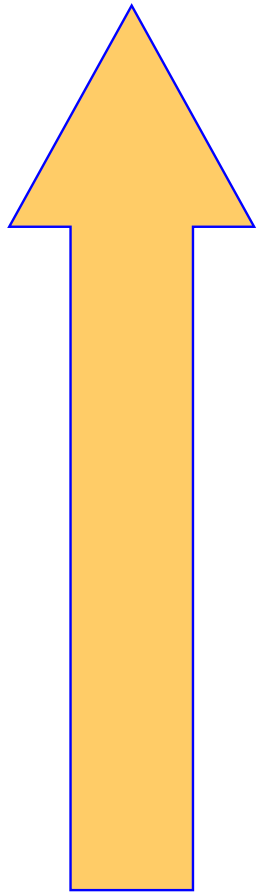
Schleifeninvariante:

$\varphi \equiv b \hat{} e = bas \hat{} exp * erg \wedge exp >= 0$

Potenzierung (Partielle Korrektheit – 2)

Zu zeigen:

```
<e >= 0>
int bas = b;
int exp = e;
int erg = 1;
<b ^ e = bas ^ exp  * erg ∧ exp >= 0>
while (exp > 0) {
   <b ^ e = bas ^ exp  * erg ∧ exp >= 0 ∧ (exp > 0)>
   if (exp % 2 == 1) {
      erg = erg * bas;
   }
   bas = bas * bas;
   exp = exp / 2;
   <b ^ e = bas ^ exp  * erg ∧ exp >= 0>
}
<b ^ e = bas ^ exp  * erg ∧ exp >= 0 ∧ ¬(exp > 0)>
<erg = b ^ e>
```



Potenzierung (Partielle Korrektheit – 3)

```
<b ^ e = bas ^ exp  * erg ∧ exp >= 0>
while (exp > 0) {
   <b ^ e = bas ^ exp  * erg ∧ exp >= 0 ∧ (exp > 0)>
   if (exp % 2 == 1) {
      erg = erg * bas;
   }
   <b ^ e = (bas * bas) ^ (exp DIV 2)  * erg ∧ exp >= 0>
   bas = bas * bas;
   <b ^ e = bas ^ (exp DIV 2)  * erg ∧ exp >= 0>
   exp = exp / 2;
   <b ^ e = bas ^ exp  * erg ∧ exp >= 0>
}
<b ^ e = bas ^ exp  * erg ∧ exp >= 0 ∧ ¬(exp > 0)>
```

Potenzierung (IF - Anweisung)

$$\frac{\langle \varphi \wedge B \rangle \ P \ \langle \psi \rangle \qquad \varphi \wedge \neg B \Rightarrow \psi}{\langle \varphi \rangle \ \texttt{if (B) \{P\}} \ \langle \psi \rangle}$$

```
<b ^ e = bas ^ exp  * erg ∧ (exp >= 0)>
if (exp % 2 == 1) {
   erg = erg * bas;
}
<b ^ e = (bas * bas) ^ (exp DIV 2)  * erg ∧ exp >= 0>
```

Zu zeigen also:

```
<b ^ e = bas ^ exp  * erg ∧ (exp >= 0) ∧ (exp % 2 = 1)>
erg = erg * bas;
<b ^ e = (bas * bas) ^ (exp DIV 2)  * erg ∧ (exp >= 0)>
```

und

```
<b ^ e = bas ^ exp  * erg ∧ (exp >= 0) ∧ ¬(exp % 2 = 1)>
⇒ <b ^ e = (bas * bas) ^ (exp DIV 2)  * erg ∧ (exp >= 0)>
```

IF – Anweisung (Bedingung erfüllt)

```
<b ^ e = bas ^ exp  * erg ∧ (exp >= 0) ∧ (exp % 2 = 1)>

<b ^ e = bas ^ (2 * exp DIV 2)  * (erg * bas) ∧ (exp >= 0)>

<b ^ e = (bas ^ 2) ^ (exp DIV 2)  * (erg * bas) ∧ (exp >= 0)>

erg = erg * bas;

<b ^ e = (bas * bas) ^ (exp DIV 2)  * erg ∧ (exp >= 0)>
```

Da exp % 2 = 1, also exp ungerade, gilt:

bas ^ exp = bas ^ (2 * exp DIV 2) * bas

Es gilt:

bas ^ (2 * exp DIV 2) = (bas ^ 2) ^ (exp DIV 2)

IF – Anweisung (Bedingung nicht erfüllt)

<b ^ e = bas ^ exp * erg ∧ (exp >= 0) ∧ ¬(exp % 2 = 1)>

<b ^ e = bas ^ (2 * exp DIV 2) * erg ∧ (exp >= 0)>

<b ^ e = (bas ^ 2) ^ (exp DIV 2) * erg ∧ (exp >= 0)>

<b ^ e = (bas * bas) ^ (exp DIV 2) * erg ∧ (exp >= 0) >

Da exp % 2 = 0, also exp gerade, gilt:

bas ^ exp = bas ^ (2 * exp DIV 2)

Es gilt:

bas ^ (2 * exp DIV 2) = (bas ^ 2) ^ (exp DIV 2)

Potenzierung (Partielle Korrektheit – 4)

```
<e >= 0>
int bas = b;
int exp = e;
int erg = 1;
<b ^ e = bas ^ exp  * erg ∧ exp >= 0>
while (exp > 0) {
   <b ^ e = bas ^ exp  * erg ∧ exp >= 0 ∧ (exp > 0)>
   if (exp % 2 == 1) {
      erg = erg * bas;
   }
   bas = bas * bas;
   exp = exp / 2;
   <b ^ e = bas ^ exp  * erg ∧ exp >= 0>
}
<b ^ e = bas ^ exp  * erg ∧ exp >= 0 ∧ ¬(exp > 0)>
<erg = b ^ e>
```

Potenzierung (Partielle Korrektheit – 5)

Noch zu zeigen:

<e >= 0>

<b ^ e = b ^ e * 1 ∧ e >= 0>

```
int bas = b;
```

<b ^ e = bas ^ e * 1 ∧ e >= 0>

```
int exp = e;
```

<b ^ e = bas ^ exp * 1 ∧ exp >= 0>

```
int erg = 1;
```

<b ^ e = bas ^ exp * erg ∧ exp >= 0>

q.e.d

Potenzierung - Terminierung

Schleifenvariante ist `exp`, da

1. `exp > 0 ⇒ exp >= 0`
2. `<exp = m ∧ exp > 0>`

```
<exp DIV 2 < m>
if (exp % 2 == 1) {
  erg = erg * bas;
}
bas = bas * bas;
<exp DIV 2 < m>
exp = exp / 2;
<exp < m>
```

Hat keinen Einfluss auf exp

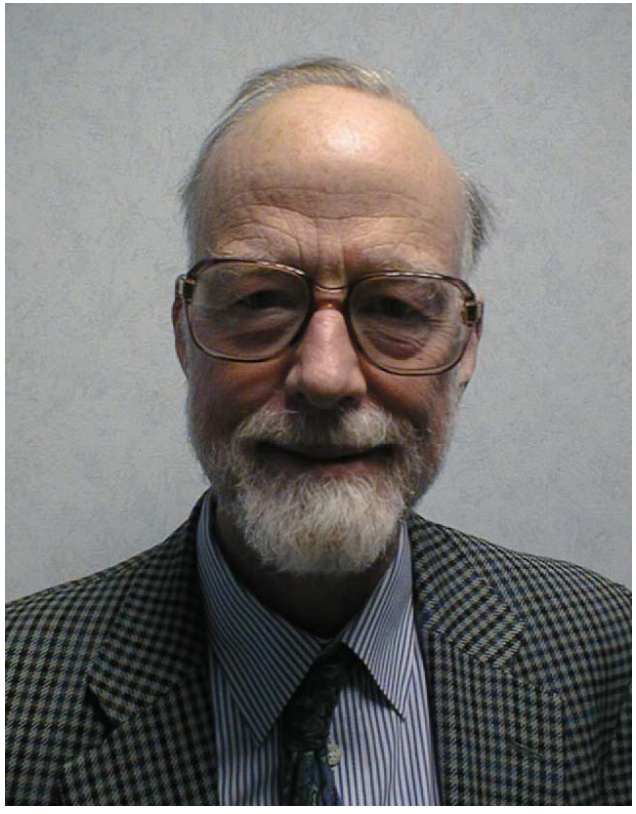
Damit: Beweis der totalen Korrektheit.

Hinweise

- **Die Schleifeninvariante zu finden, ist ein kreativer Prozess**
  - Tabelle
  - Verständnis des Algorithmus
  - Erfahrung
- **In den einzelnen Schritten möglichst nicht umformen bzw. ausrechnen**
- **Die Beweisrichtung ist von „oben“ nach „unten“ (vorwärts)**
- **Die Beweisfindung wird oft erleichtert, wenn man von „unten“ nach „oben“ vorgeht (rückwärts)**

Prof. Tony Hoare

- Full name: Sir Charles Antony Richard Hoare,
  born: 11. Jan 1934
- Elliot Brothers Ltd., London
  (1960 – 1966)
- Professor of Computing Science
  at Queen's University, Belfast
  (1968 – 1977)
- Professor of Computation and
  Head of the Programming
  Research Group, Oxford
  (1977-1999)
- Senior Researcher with
  Microsoft Research in
  Cambridge
  (since 1999)



(Quelle: http://research.microsoft.com/~thoare/)