II. Imperative und objektorientierte Programmierung

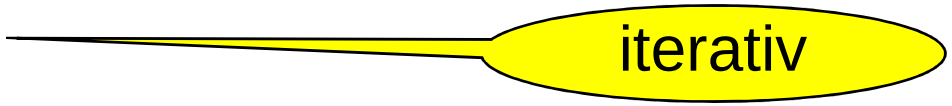
- 1. Grundelemente der Programmierung
- 2. Objekte, Klassen und Methoden
- 3. Rekursion und dynamische Datenstrukturen
- 4. Erweiterung von Klassen und fortgeschrittene Konzepte

II.3. Rekursion und dynamische Datenstrukturen

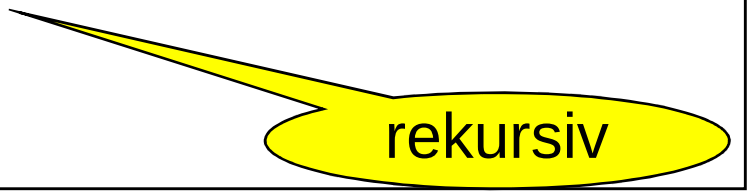
- **1. Rekursive Algorithmen**
- **2. Rekursive (dynamische) Datenstrukturen**

Fakultät

```
public static int fak (int x) {
        int res = 1;
        while (x > 1) {
            res = x * res;
            x = x - 1;
        }
        return res;
}
```




```
public static int fak (int x) {
        if (x > 1) return x * fak (x - 1);
        else       return 1;
    }
```



Fibonacci-Zahlen (nicht-lineare Rekursion)

$$\text{fib}(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ 1 & x = 1 \\ \text{fib}(x-1) + \text{fib}(x-2) & x \geq 2 \end{cases}$$

```
public static int fib (int x) {

 if       (x < 1)   return 0;
 else if (x == 1)  return 1;
 else               return fib (x - 1) + fib (x - 2);

}
```

nicht-linear

even & odd (verschränkte Rekursion)

```
public static boolean even (int x) {

      if       (x == 0)     return true;
      else if  (x > 0)      return odd (x - 1);
      else                  return odd (x + 1);

   }
```

verschränkt

```
   public static boolean odd (int x) {

      if       (x == 0)     return false;
      else if  (x > 0)      return even (x - 1);
      else                  return even (x + 1);

   }
```

verschränkt

sqrt (Endrekursion)

```
public static float sqrt (float uG, float oG, float x) {
 float   m, epsilon = 1e-3f;
 m = (uG + oG) / 2;
 if       (oG - uG <= epsilon)return m;
 else if (m * m > x)          return sqrt (uG, m, x);
 else                         return sqrt (m, oG, x);
}
```


```
public static int fak (int x) {
        if (x > 1) return x * fak (x - 1);
        else       return 1;
   }
```

sqrt (Endrekursion)

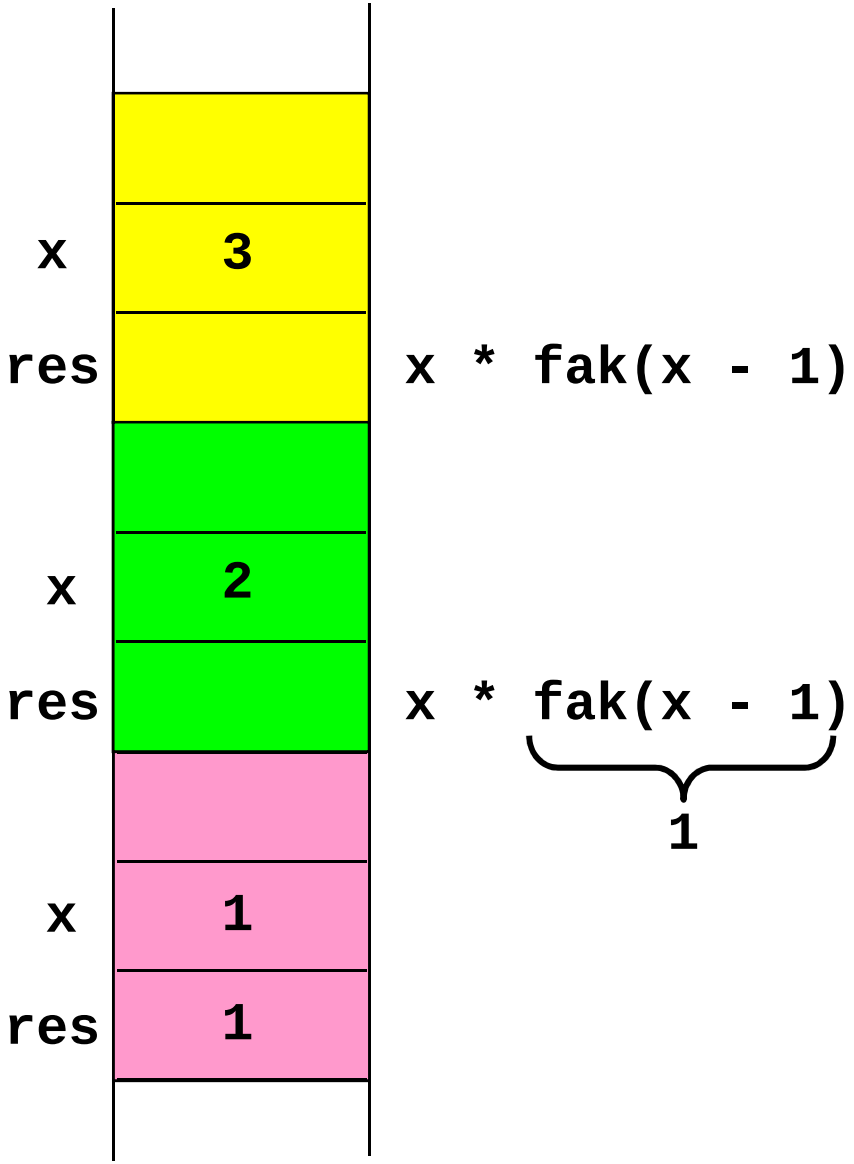
```
public static float sqrt (float uG, float oG, float x) {
 float  m, epsilon = 1e-3f;
 m = (uG + oG) / 2;
 if       (oG - uG <= epsilon)return m;
 else if (m * m > x)          return sqrt (uG, m, x);
 else                         return sqrt (m, oG, x);
}
```

```
 float  m, epsilon = 1e-3f;
 for (;;) {
  m = (uG + oG) / 2;
  if       (oG - uG <= epsilon)return m;
  else if (m * m > x)           oG = m;
  else                          uG = m;
 }
```

Speicherorganisation bei Rekursion

```
public static int fak (int x) {

if   (x > 1)
     return x * fak (x - 1);
else return 1;

}
```

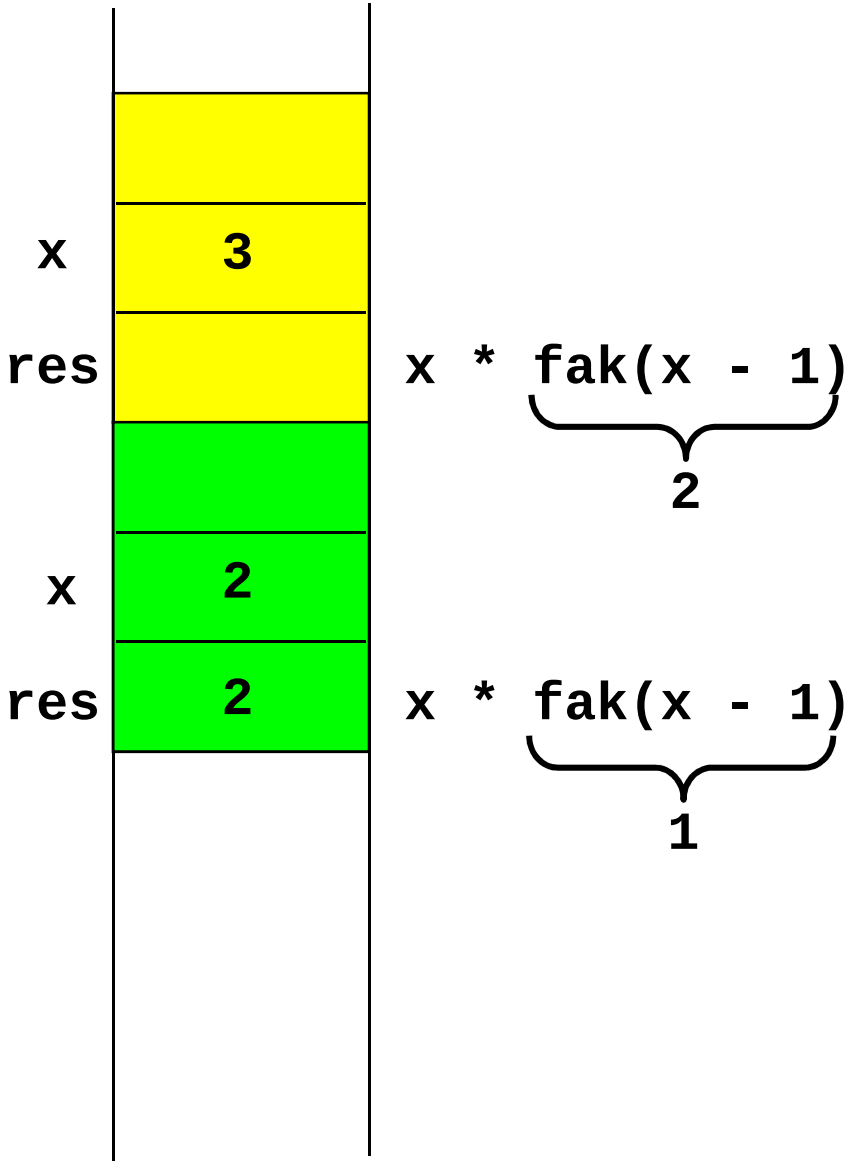
Aufruf: **fak(3)**



Speicherorganisation bei Rekursion

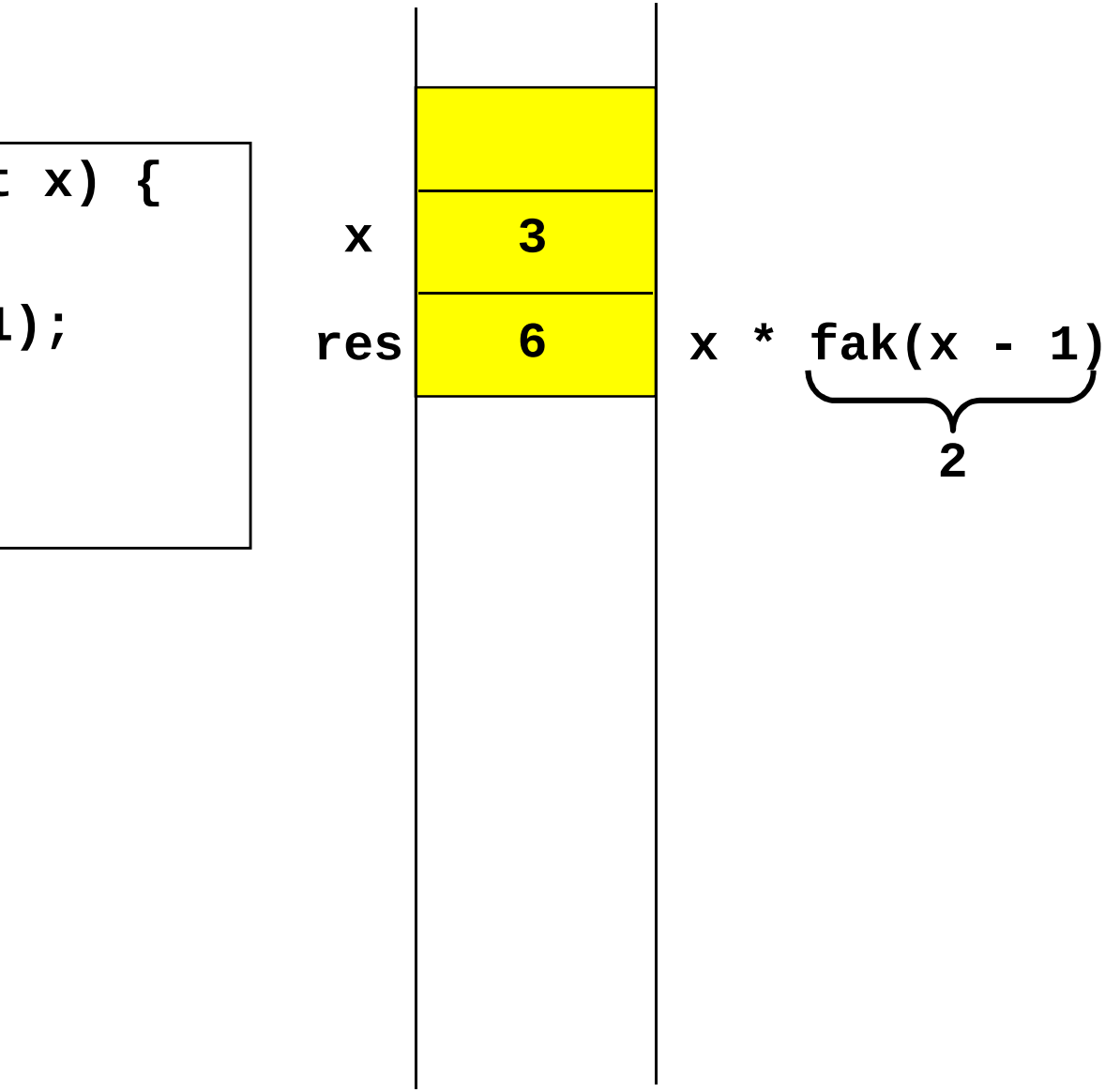
```
public static int fak (int x) {

if   (x > 1)
     return x * fak (x - 1);
else return 1;

}
```

Aufruf: **fak(3)**



Speicherorganisation bei Rekursion

```
public static int fak (int x) {

if   (x > 1)
     return x * fak (x - 1);
else return 1;

}
```

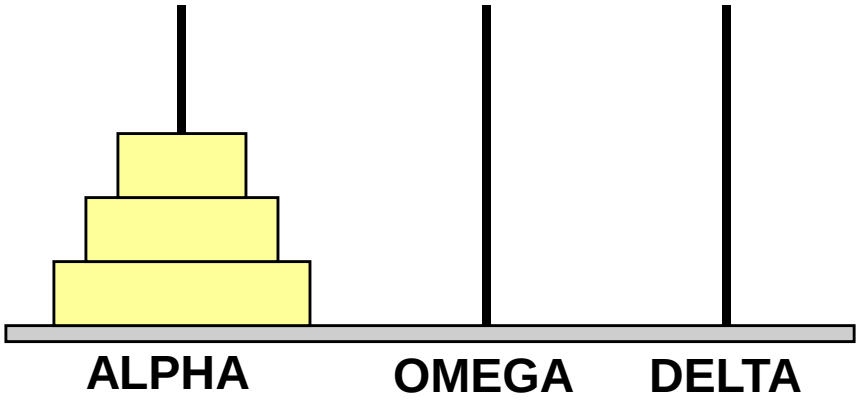


Aufruf: **`fak(3)`**

Türme von Hanoi

Aufgabe:

- bewege die Scheiben von ALPHA über DELTA nach OMEGA
- es darf immer ***nur eine Scheibe*** bewegt werden
- niemals darf eine Scheibe auf eine kleinere bewegt werden



Lösung (Divide & Conquer):

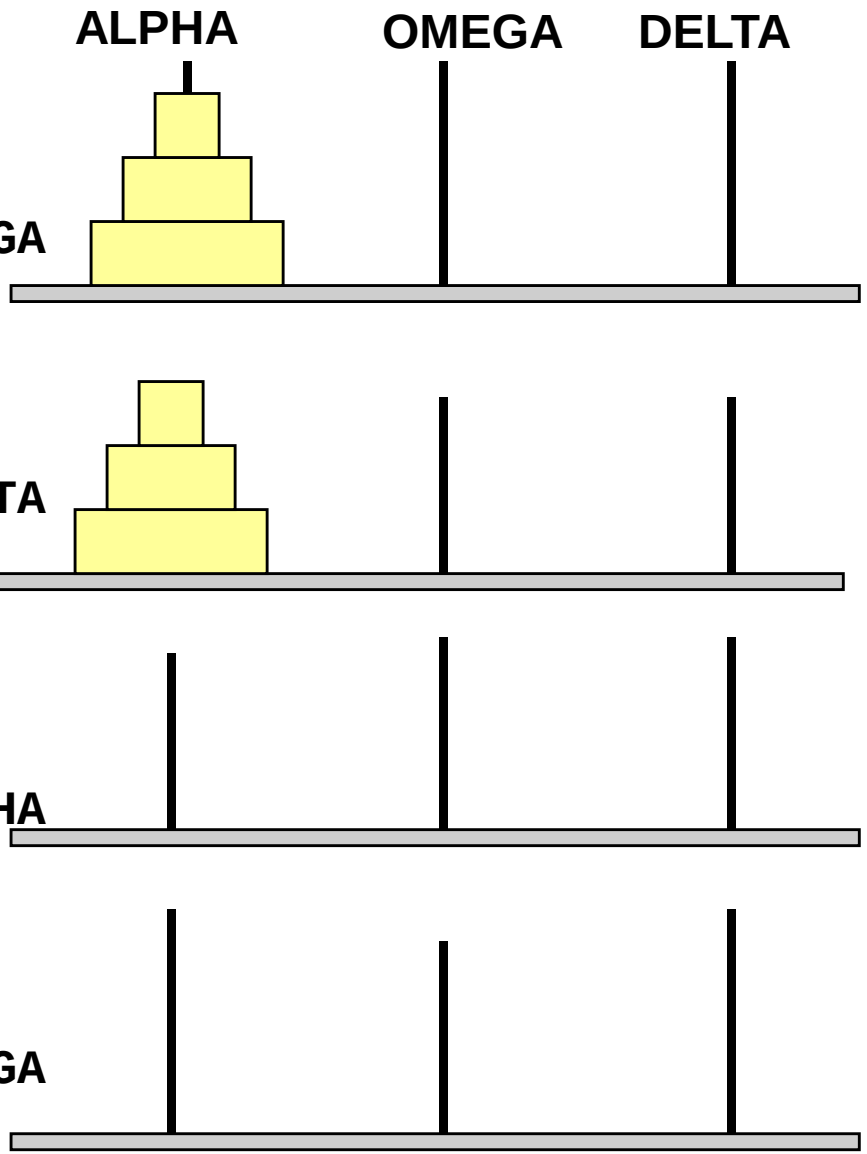
- allgemeine Lösung für einen Turm der Höhe h von ALPHA nach OMEGA
  - h = 0 gar nichts machen
  - h > 0 1. Turm der Höhe h-1 von ALPHA über OMEGA nach DELTA
    2. (Unterste) Scheibe von ALPHA nach OMEGA legen
    3. Turm der Höhe h-1 von DELTA über ALPHA nach OMEGA

Türme von Hanoi

```
public class Hanoi {

 private static void bewegeTurm (int hoehe,
                      String von, String ueber, String nach) {
    if (hoehe > 0) { bewegeTurm (hoehe-1, von, nach, ueber);
                     druckeZug  (hoehe, von, nach);
                     bewegeTurm (hoehe-1, ueber, von, nach);
    }
  }

 private static void druckeZug (int hoehe, String von, String nach)  {
  System.out.println ("Scheibe " + hoehe + " von " + von + " nach " + nach);
 }

 public static void main (String [] args) {
  bewegeTurm(Integer.parseInt(args[0]), "ALPHA", "DELTA", "OMEGA");
 }
}
```

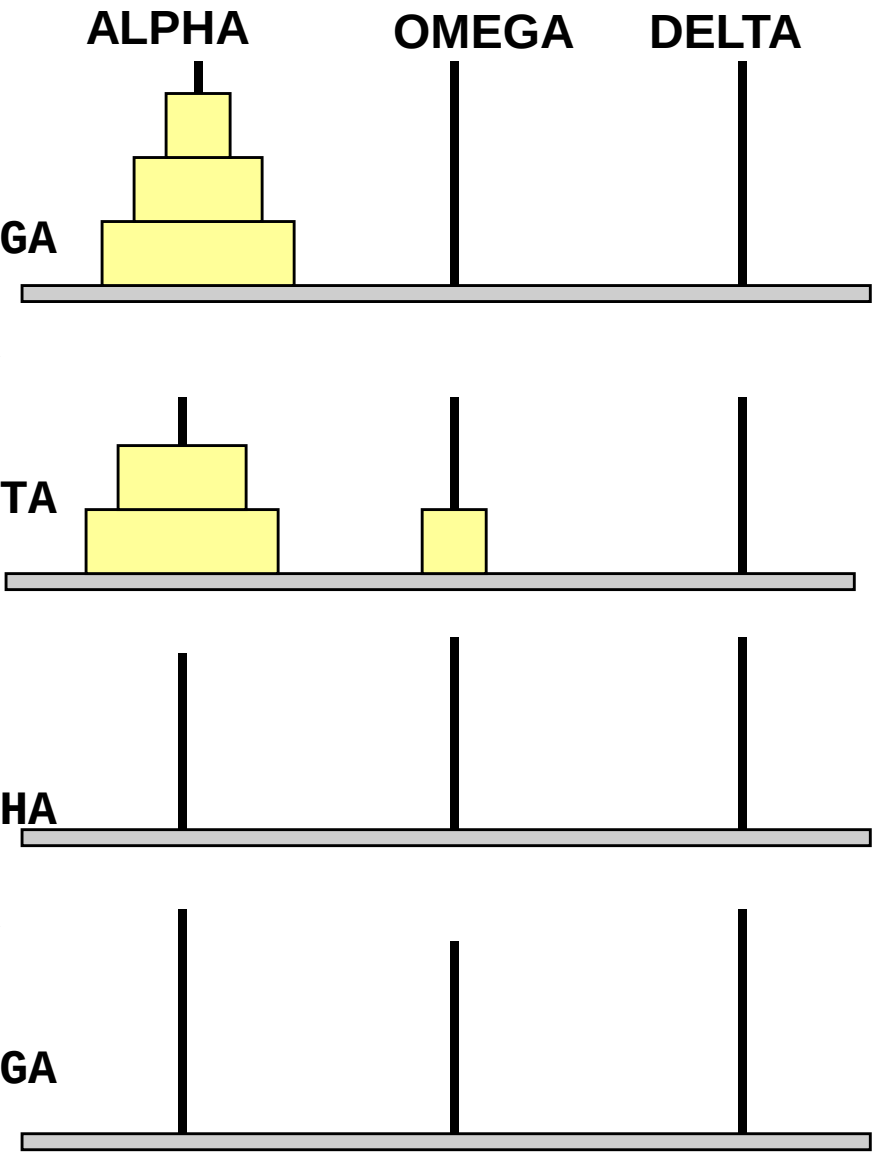
Türme von Hanoi

```
3 ALPHA DELTA OMEGA
  ❶ 2 ALPHA OMEGA DELTA
    ❶ 1 ALPHA DELTA OMEGA
      ❶ 0 ALPHA OMEGA DELTA
      ❷ Scheibe 1 von ALPHA nach OMEGA
      ❸ 0 DELTA ALPHA OMEGA
    ❷ Scheibe 2 von ALPHA nach DELTA
    ❸ 1 OMEGA ALPHA DELTA
      ❶ 0 OMEGA DELTA ALPHA
      ❷ Scheibe 1 von OMEGA nach DELTA
      ❸ 0 ALPHA OMEGA DELTA
  ❷ Scheibe 3 von ALPHA nach OMEGA
  ❸ 2 DELTA ALPHA OMEGA
    ❶ 1 DELTA OMEGA ALPHA
      ❶ 0 DELTA ALPHA OMEGA
      ❷ Scheibe 1 von DELTA nach ALPHA
      ❸ 0 OMEGA DELTA ALPHA
    ❷ Scheibe 2 von DELTA nach OMEGA
    ❸ 1 ALPHA DELTA OMEGA
      ❶ 0 ALPHA OMEGA DELTA
      ❷ Scheibe 1 von ALPHA nach OMEGA
      ❸ 0 DELTA ALPHA OMEGA
```



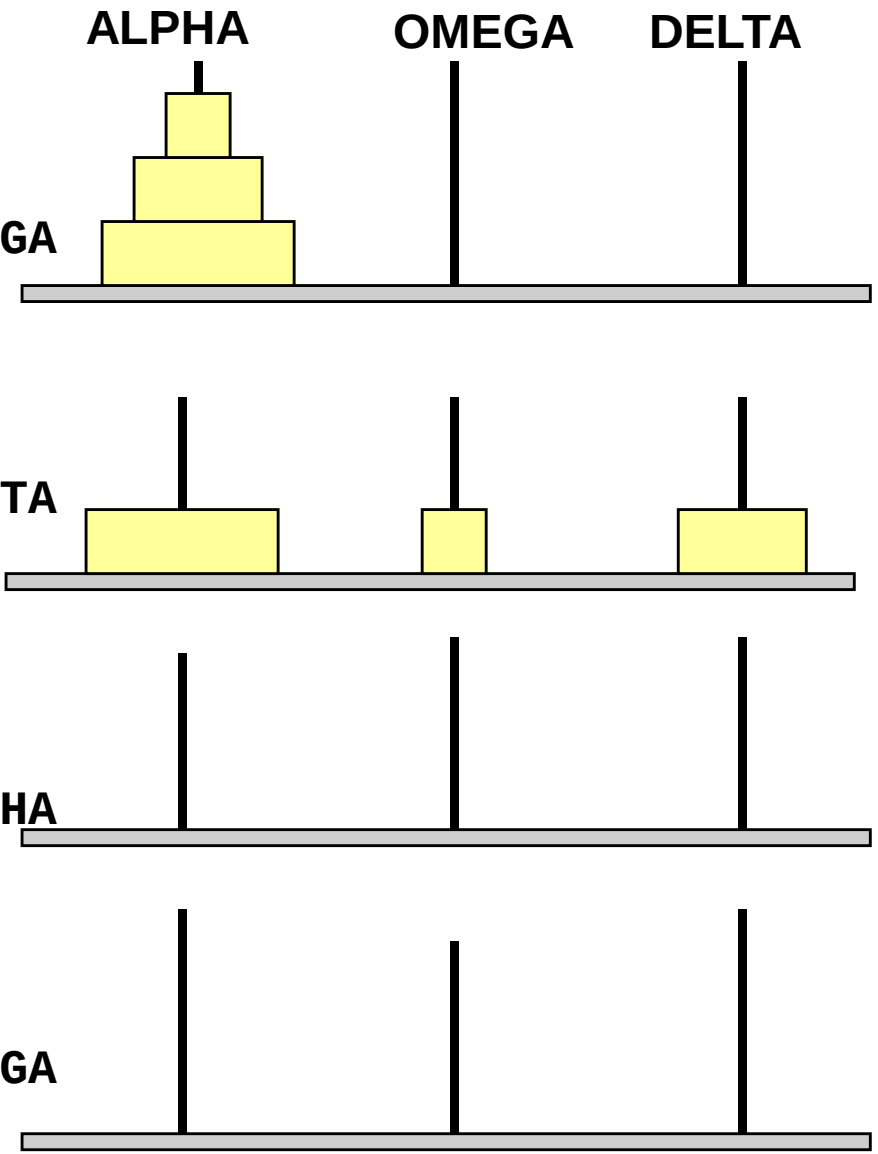
Türme von Hanoi

```
3 ALPHA DELTA OMEGA
  ❶ 2 ALPHA OMEGA DELTA
    ❶ 1 ALPHA DELTA OMEGA
      ❶ 0 ALPHA OMEGA DELTA
      ❷ Scheibe 1 von ALPHA nach OMEGA
      ❸ 0 DELTA ALPHA OMEGA
    ❷ Scheibe 2 von ALPHA nach DELTA
    ❸ 1 OMEGA ALPHA DELTA
      ❶ 0 OMEGA DELTA ALPHA
      ❷ Scheibe 1 von OMEGA nach DELTA
      ❸ 0 ALPHA OMEGA DELTA
  ❷ Scheibe 3 von ALPHA nach OMEGA
  ❸ 2 DELTA ALPHA OMEGA
    ❶ 1 DELTA OMEGA ALPHA
      ❶ 0 DELTA ALPHA OMEGA
      ❷ Scheibe 1 von DELTA nach ALPHA
      ❸ 0 OMEGA DELTA ALPHA
    ❷ Scheibe 2 von DELTA nach OMEGA
    ❸ 1 ALPHA DELTA OMEGA
      ❶ 0 ALPHA OMEGA DELTA
      ❷ Scheibe 1 von ALPHA nach OMEGA
      ❸ 0 DELTA ALPHA OMEGA
```



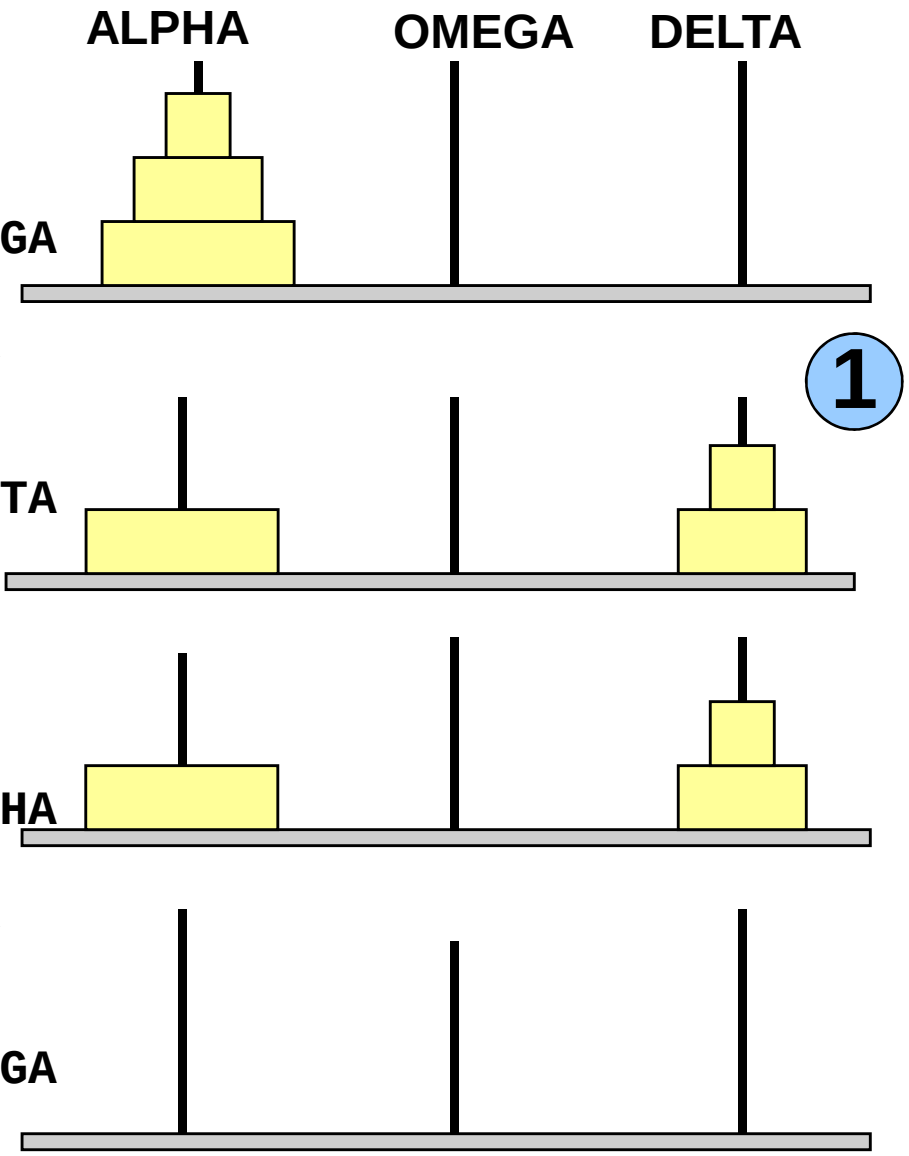
Türme von Hanoi

```
3 ALPHA DELTA OMEGA
  ❶ 2 ALPHA OMEGA DELTA
    ❶ 1 ALPHA DELTA OMEGA
      ❶ 0 ALPHA OMEGA DELTA
      ❷ Scheibe 1 von ALPHA nach OMEGA
      ❸ 0 DELTA ALPHA OMEGA
    ❷ Scheibe 2 von ALPHA nach DELTA
    ❸ 1 OMEGA ALPHA DELTA
      ❶ 0 OMEGA DELTA ALPHA
      ❷ Scheibe 1 von OMEGA nach DELTA
      ❸ 0 ALPHA OMEGA DELTA
  ❷ Scheibe 3 von ALPHA nach OMEGA
  ❸ 2 DELTA ALPHA OMEGA
    ❶ 1 DELTA OMEGA ALPHA
      ❶ 0 DELTA ALPHA OMEGA
      ❷ Scheibe 1 von DELTA nach ALPHA
      ❸ 0 OMEGA DELTA ALPHA
    ❷ Scheibe 2 von DELTA nach OMEGA
    ❸ 1 ALPHA DELTA OMEGA
      ❶ 0 ALPHA OMEGA DELTA
      ❷ Scheibe 1 von ALPHA nach OMEGA
      ❸ 0 DELTA ALPHA OMEGA
```



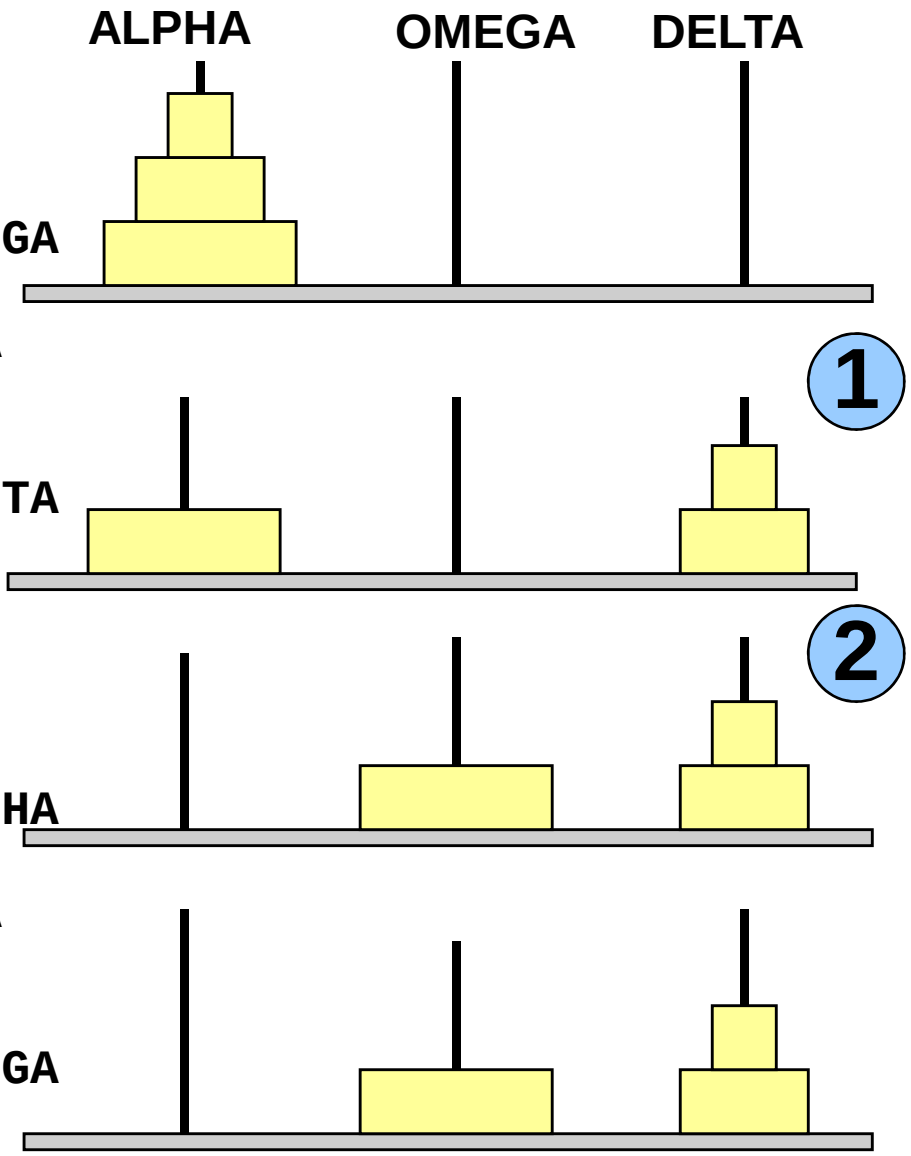
Türme von Hanoi

```
3 ALPHA DELTA OMEGA
  ❶ 2 ALPHA OMEGA DELTA
    ❶ 1 ALPHA DELTA OMEGA
      ❶ 0 ALPHA OMEGA DELTA
      ❷ Scheibe 1 von ALPHA nach OMEGA
      ❸ 0 DELTA ALPHA OMEGA
    ❷ Scheibe 2 von ALPHA nach DELTA
    ❸ 1 OMEGA ALPHA DELTA
      ❶ 0 OMEGA DELTA ALPHA
      ❷ Scheibe 1 von OMEGA nach DELTA
      ❸ 0 ALPHA OMEGA DELTA
  ❷ Scheibe 3 von ALPHA nach OMEGA
  ❸ 2 DELTA ALPHA OMEGA
    ❶ 1 DELTA OMEGA ALPHA
      ❶ 0 DELTA ALPHA OMEGA
      ❷ Scheibe 1 von DELTA nach ALPHA
      ❸ 0 OMEGA DELTA ALPHA
    ❷ Scheibe 2 von DELTA nach OMEGA
    ❸ 1 ALPHA DELTA OMEGA
      ❶ 0 ALPHA OMEGA DELTA
      ❷ Scheibe 1 von ALPHA nach OMEGA
      ❸ 0 DELTA ALPHA OMEGA
```



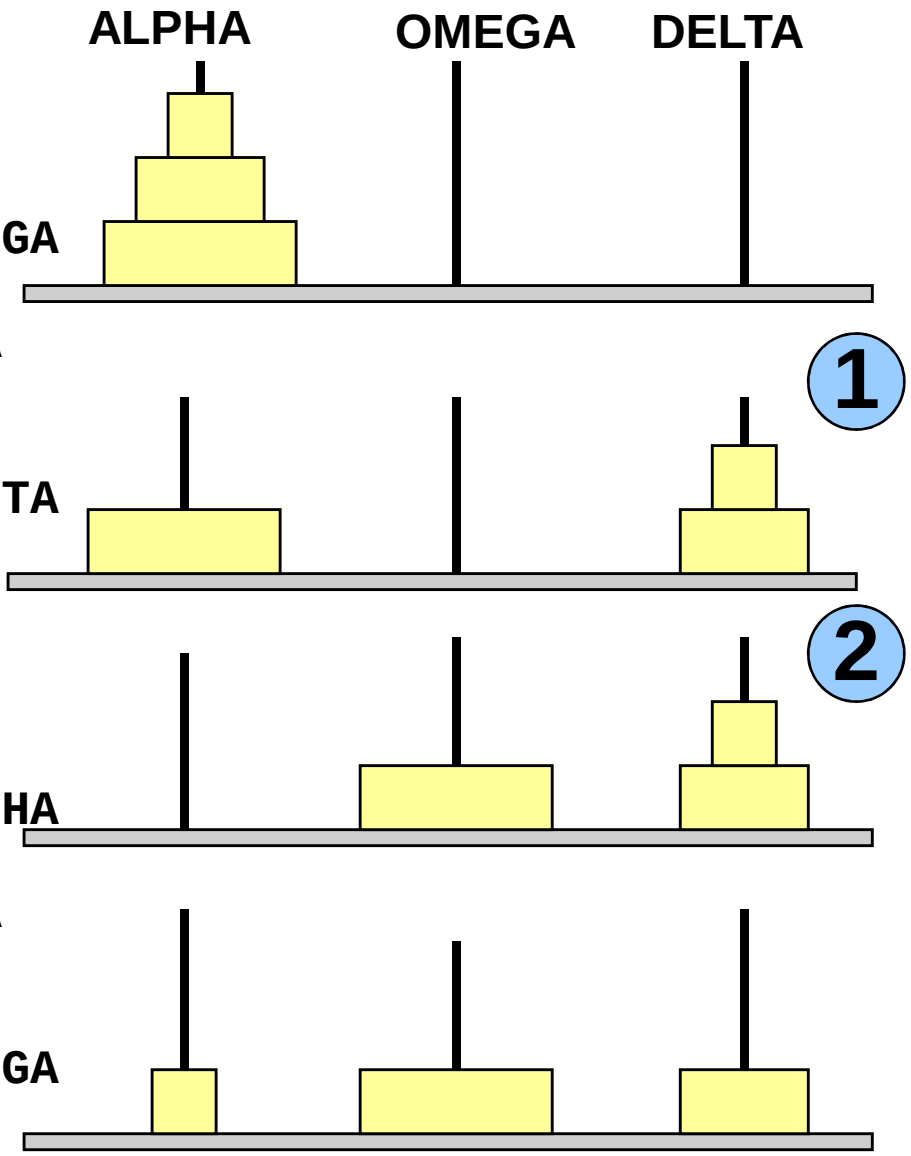
Türme von Hanoi

```
3 ALPHA DELTA OMEGA
  ❶ 2 ALPHA OMEGA DELTA
    ❶ 1 ALPHA DELTA OMEGA
      ❶ 0 ALPHA OMEGA DELTA
      ❷ Scheibe 1 von ALPHA nach OMEGA
      ❸ 0 DELTA ALPHA OMEGA
    ❷ Scheibe 2 von ALPHA nach DELTA
    ❸ 1 OMEGA ALPHA DELTA
      ❶ 0 OMEGA DELTA ALPHA
      ❷ Scheibe 1 von OMEGA nach DELTA
      ❸ 0 ALPHA OMEGA DELTA
  ❷ Scheibe 3 von ALPHA nach OMEGA
  ❸ 2 DELTA ALPHA OMEGA
    ❶ 1 DELTA OMEGA ALPHA
      ❶ 0 DELTA ALPHA OMEGA
      ❷ Scheibe 1 von DELTA nach ALPHA
      ❸ 0 OMEGA DELTA ALPHA
    ❷ Scheibe 2 von DELTA nach OMEGA
    ❸ 1 ALPHA DELTA OMEGA
      ❶ 0 ALPHA OMEGA DELTA
      ❷ Scheibe 1 von ALPHA nach OMEGA
      ❸ 0 DELTA ALPHA OMEGA
```



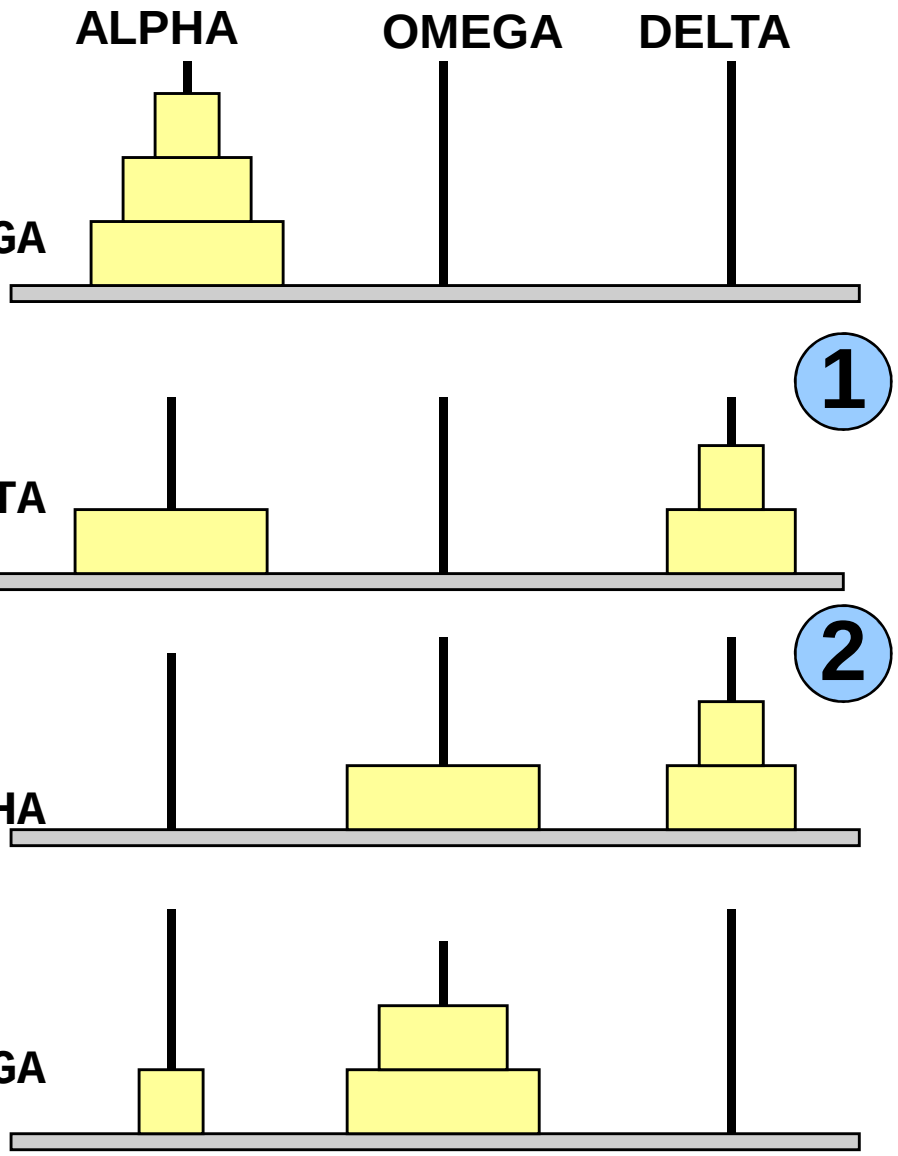
Türme von Hanoi

```
3 ALPHA DELTA OMEGA
  ❶ 2 ALPHA OMEGA DELTA
    ❶ 1 ALPHA DELTA OMEGA
      ❶ 0 ALPHA OMEGA DELTA
      ❷ Scheibe 1 von ALPHA nach OMEGA
      ❸ 0 DELTA ALPHA OMEGA
    ❷ Scheibe 2 von ALPHA nach DELTA
    ❸ 1 OMEGA ALPHA DELTA
      ❶ 0 OMEGA DELTA ALPHA
      ❷ Scheibe 1 von OMEGA nach DELTA
      ❸ 0 ALPHA OMEGA DELTA
  ❷ Scheibe 3 von ALPHA nach OMEGA
  ❸ 2 DELTA ALPHA OMEGA
    ❶ 1 DELTA OMEGA ALPHA
      ❶ 0 DELTA ALPHA OMEGA
      ❷ Scheibe 1 von DELTA nach ALPHA
      ❸ 0 OMEGA DELTA ALPHA
    ❷ Scheibe 2 von DELTA nach OMEGA
    ❸ 1 ALPHA DELTA OMEGA
      ❶ 0 ALPHA OMEGA DELTA
      ❷ Scheibe 1 von ALPHA nach OMEGA
      ❸ 0 DELTA ALPHA OMEGA
```



Türme von Hanoi

```
3 ALPHA DELTA OMEGA
  ❶ 2 ALPHA OMEGA DELTA
    ❶ 1 ALPHA DELTA OMEGA
      ❶ 0 ALPHA OMEGA DELTA
      ❷ Scheibe 1 von ALPHA nach OMEGA
      ❸ 0 DELTA ALPHA OMEGA
    ❷ Scheibe 2 von ALPHA nach DELTA
    ❸ 1 OMEGA ALPHA DELTA
      ❶ 0 OMEGA DELTA ALPHA
      ❷ Scheibe 1 von OMEGA nach DELTA
      ❸ 0 ALPHA OMEGA DELTA
  ❷ Scheibe 3 von ALPHA nach OMEGA
  ❸ 2 DELTA ALPHA OMEGA
    ❶ 1 DELTA OMEGA ALPHA
      ❶ 0 DELTA ALPHA OMEGA
      ❷ Scheibe 1 von DELTA nach ALPHA
      ❸ 0 OMEGA DELTA ALPHA
    ❷ Scheibe 2 von DELTA nach OMEGA
    ❸ 1 ALPHA DELTA OMEGA
      ❶ 0 ALPHA OMEGA DELTA
      ❷ Scheibe 1 von ALPHA nach OMEGA
      ❸ 0 DELTA ALPHA OMEGA
```



Türme von Hanoi

```
3 ALPHA DELTA OMEGA
  ❶ 2 ALPHA OMEGA DELTA
    ❶ 1 ALPHA DELTA OMEGA
      ❶ 0 ALPHA OMEGA DELTA
      ❷ Scheibe 1 von ALPHA nach OMEGA
      ❸ 0 DELTA ALPHA OMEGA
    ❷ Scheibe 2 von ALPHA nach DELTA
    ❸ 1 OMEGA ALPHA DELTA
      ❶ 0 OMEGA DELTA ALPHA
      ❷ Scheibe 1 von OMEGA nach DELTA
      ❸ 0 ALPHA OMEGA DELTA
  ❷ Scheibe 3 von ALPHA nach OMEGA
  ❸ 2 DELTA ALPHA OMEGA
    ❶ 1 DELTA OMEGA ALPHA
      ❶ 0 DELTA ALPHA OMEGA
      ❷ Scheibe 1 von DELTA nach ALPHA
      ❸ 0 OMEGA DELTA ALPHA
    ❷ Scheibe 2 von DELTA nach OMEGA
    ❸ 1 ALPHA DELTA OMEGA
      ❶ 0 ALPHA OMEGA DELTA
      ❷ Scheibe 1 von ALPHA nach OMEGA
      ❸ 0 DELTA ALPHA OMEGA
```