Vorname	Name	Matr.-Nr.

1

Aufgabe 1 (6 Punkte)

Gegeben sei das folgende konvergente Termersetzungssystem $\mathcal{R}$, welches zwei Listen konkateniert. Hierbei steht nil für die leere Liste und z.B. $\mathsf{cons}(1, \mathsf{cons}(2, \mathsf{nil}))$ für die Liste $[1, 2]$.

$$\begin{array}{rcl} \mathsf{app}(\mathsf{nil}, z) & \to & z \\ \mathsf{app}(\mathsf{cons}(x, y), z) & \to & \mathsf{cons}(x, \mathsf{app}(y, z)) \end{array}$$

Dann gilt z.B. $\mathsf{app}(\mathsf{cons}(x, \mathsf{cons}(y, \mathsf{nil})), \mathsf{cons}(z, \mathsf{nil})) \to_{\mathcal{R}}^{*} \mathsf{cons}(x, \mathsf{cons}(y, \mathsf{cons}(z, \mathsf{nil})))$. Sei $\mathcal{E}$ das entsprechende Gleichungssystem (bei dem $\to$ durch $\equiv$ ersetzt wird). Wir sind nun interessiert an der Aussage, ob das Anfügen einer leeren Liste die Liste unverändert lässt, ob also $\mathsf{app}(y, \mathsf{nil}) \equiv_{\mathcal{E}} y$ gilt. Beweisen oder widerlegen Sie:

a) $\mathsf{app}(y, \mathsf{nil}) \equiv_{\mathcal{E}} y$.

b) $\mathsf{app}(y, \mathsf{nil}) \equiv y$ ist induktiv gültig in $\mathcal{E}$.

Vorname	Name	Matr.-Nr.

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Sei $\mathcal{R}$ ein terminierendes und (endliches) TES über einer endlichen Signatur.

a) Beweisen Sie, dass für jeden Term die Menge seiner Normalformen endlich ist.

b) Beweisen Sie, dass die Aussage in a) nicht gilt, falls eine der beiden Eigenschaften Terminierung von $\mathcal{R}$ oder Endlichkeit von $\mathcal{R}$ nicht vorhanden ist (die Signatur soll weiterhin endlich bleiben).

Vorname	Name	Matr.-Nr.

Aufgabe 3 **(6 Punkte)**

Das folgende TES berechnet den 2er-Logarithmus einer natürlichen Zahl.

$$\begin{aligned}
\mathsf{half}(\mathsf{0}) &\to \mathsf{0}\\
\mathsf{half}(\mathsf{s}(\mathsf{0})) &\to \mathsf{0}\\
\mathsf{half}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(x))) &\to \mathsf{s}(\mathsf{half}(x))\\
\mathsf{log}(\mathsf{s}(\mathsf{0})) &\to \mathsf{0}\\
\mathsf{log}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(x))) &\to \mathsf{s}(\mathsf{log}(\mathsf{s}(\mathsf{half}(x))))
\end{aligned}$$

Geben Sie eine Präzedenz an, so dass die entsprechende LPO die Terminierung dieses TES zeigt und zeigen Sie detailliert, warum $\mathsf{half}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(x))) \succ_{lpo} \mathsf{s}(\mathsf{half}(x))$ und $\mathsf{log}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(x))) \succ_{lpo} \mathsf{s}(\mathsf{log}(\mathsf{s}(\mathsf{half}(x))))$ gilt.

Vorname	Name	Matr.-Nr.

Aufgabe 4 **(6 Punkte)**

Gegeben sei das folgende imperative Programm

```
a = b;
c = f[d];
if (b == d) {
  g[a] = c; (*)
} else {
  g[b] = f[a];
}
(**)
```

a) Zeigen Sie mit der Methode des Kongruenzabschlusses, dass an der Stelle (*) die Werte `f[a]` und `g[a]` identisch sind.

b) Wie kann man die Methode des Kongruenzabschlusses nutzen, um `f[a] == g[a]` an der Stelle (**) zu verifizieren? Beschreiben Sie nur, was Sie mit der Kongruenzabschlussmethode lösen, ohne diese wie in Teil a) durchzuführen.

Vorname	Name	Matr.-Nr.

Aufgabe 5 (6 Punkte)

Die Relation $\rightarrow_1$ und $\rightarrow_2$ kommutieren, wenn aus $t_1 \leftarrow_1^* s \rightarrow_2^* t_2$ folgt, dass es einen Term s' mit $t_1 \rightarrow_2^* s' \leftarrow_1^* t_2$ gibt. Die Relation $\rightarrow_1$ und $\rightarrow_2$ kommutieren lokal, wenn aus $t_1 \leftarrow_1 s \rightarrow_2 t_2$ folgt, dass es einen Term s' mit $t_1 \rightarrow_2^* s' \leftarrow_1^* t_2$ gibt.

Zeigen Sie: Wenn $\rightarrow_1 \cup \rightarrow_2$ terminiert, dann sind lokale Kommutation und Kommutation von $\rightarrow_1$ und $\rightarrow_2$ äquivalent.

Hinweis: Eine ähnliche Aussage für die Konfluenz wurde in der Vorlesung bereits bewiesen.

Vorname	Name	Matr.-Nr.

6

Aufgabe 6 (6 Punkte)

Bewerten Sie die folgenden Aussagen. Für jede richtige Antwort gibt es einen Punkt, für jede falsche wird ein halber Punkt abgezogen. Die minimale Punktzahl in dieser Aufgabe beträgt 0.

	Stimmt	Stimmt nicht
Lokale Konfluenz von $\to_\mathcal{R}$ ist entscheidbar.		
Jede Simplifikationsordnung ist irreflexiv.		
Grundterminierung, d.h. Terminierung für Terme aus $\mathcal{T}(\Sigma)$, ist entscheidbar.		
$\mathcal{R}$ ist konvergent gdw. $\mathcal{R}$ lokal konfluent ist und terminiert.		
Zu jedem Termgleichungssystem gibt es ein äquivalentes konvergentes TES.		
Das Wortproblem $u \equiv_\mathcal{E} v$ ist semi-entscheidbar.		

Vorname	Name	Matr.-Nr.

Aufgabe 7 (6 Punkte)

Erzeugen Sie aus dem folgenden Termgleichungssystem $\mathcal{E}$ ein konvergentes TES mit der einfachen Vervollständigung (BASIC_COMPLETION). Nutzen Sie als Reduktionsordnung eine LPO mit Präzedenz $\mathsf{i} \sqsupset \mathsf{f} \sqsupset \mathsf{e}$.

$$\begin{aligned} \mathsf{f}(\mathsf{e}, x) &\equiv x \\ \mathsf{f}(\mathsf{i}(x), x) &\equiv \mathsf{e} \\ \mathsf{i}(\mathsf{i}(x)) &\equiv x \end{aligned}$$

Geben Sie als Zwischenergebnisse jeweils $\mathcal{R}_i$ und $CP(\mathcal{R}_i)$ an. Sie brauchen jedoch nur die Veränderungen angeben ($\mathcal{R}_{i+1} = \mathcal{R}_i \cup \{\ldots\}$, $CP(\mathcal{R}_{i+1}) = CP(\mathcal{R}_i) \cup \{\ldots\}$).