RHEINISCH-
WESTFÄLISCHE
TECHNISCHE
HOCHSCHULE
AACHEN

LEHR- UND FORSCHUNGSGEBIET INFORMATIK II

RWTH Aachen · D-52056 Aachen · GERMANY
http://www-i2.informatik.rwth-aachen.de/lufgi2

LuFG Informatik II

Prof. Dr. Jürgen Giesl
René Thiemann

Übungen *Termersetzungssysteme* – Blatt 1

Abgabe am Mittwoch, den 28.04.2004, zu Beginn der Übung.

Aufgabe 1 (1+1+2 Punkte)

Sei die Signatur Σ gegeben durch $\Sigma_0 = \{\mathsf{0}, \mathsf{1}, \mathsf{X}, \mathsf{Y}\}$, $\Sigma_1 = \{\mathsf{D}\}$ und $\Sigma_2 = \{\mathsf{plus}, \mathsf{times}\}$.

a) Ein *Termersetzungssystem* $\mathcal{R}$ besteht aus Gleichungen $t_1 \equiv t_2$, wobei diese Gleichungen nur von links nach rechts ausgewertet werden können. Man schreibt daher $t_1 \to t_2$ und bezeichnet solche Gleichungen als *Regeln*. Geben Sie ein Termersetzungssystem $\mathcal{R}$ über der Variablenmenge $\mathcal{V} = \{p, q, \dots\}$ an, welches symbolische Ableitungen nach X durchführt. Ergänzen Sie dazu die rechten Seiten der folgenden Regeln für den Ableitungsoperator D.

$$\begin{aligned}
\mathsf{D}(\mathsf{X}) &\to \dots \\
\mathsf{D}(\mathsf{Y}) &\to \dots \\
\mathsf{D}(\mathsf{1}) &\to \dots \\
\mathsf{D}(\mathsf{0}) &\to \dots \\
\mathsf{D}(\mathsf{plus}(p, q)) &\to \dots \\
\mathsf{D}(\mathsf{times}(p, q)) &\to \dots
\end{aligned}$$

b) Werten Sie den Term $\mathsf{D}(\mathsf{times}(\mathsf{X}, \mathsf{1}))$ auf alle möglichen Arten aus. Ist Ihr Ergebnis eindeutig?

c) Bearbeiten Sie Teil b) unter Hinzunahme der Regel $\mathsf{times}(p, \mathsf{1}) \to p$.

Aufgabe 2 (1+3+1+1+4+2 Punkte)

Sei die Signatur Σ gegeben durch $\Sigma_0 = \{\mathcal{O}\}$, $\Sigma_1 = \{\mathsf{succ}\}$ und $\Sigma_2 = \{\mathsf{plus}\}$. Sei außerdem $\mathcal{E} = \{\mathsf{plus}(\mathcal{O}, y) \equiv y,\ \mathsf{plus}(\mathsf{succ}(x), y) \equiv \mathsf{succ}(\mathsf{plus}(x, y))\}$ ein Termgleichungssystem über Σ und $\{x, y, \dots\}$.

Widerlegen oder beweisen Sie die folgenden Aussagen, ohne Resultate aus Kapitel 3 zu benutzen, wie etwa die Stabilität und Monotonie von $\equiv_{\mathcal{E}}$.

a) Es gibt ein Modell A mit Träger $\mathbb{N}$ von $\mathcal{E}$.

b) Es gibt ein Modell A mit Träger $\mathbb{N}$ von $\mathcal{E}$ mit $A \models \mathsf{plus}(x, \mathcal{O}) \equiv \mathsf{succ}(\mathcal{O})$.

c) Es gibt ein Modell A mit Träger $\mathbb{N}$ von $\mathcal{E}$ mit $A \not\models \mathsf{plus}(x, \mathcal{O}) \equiv \mathsf{succ}(\mathcal{O})$.

d) $\mathcal{E} \models \mathsf{plus}(x, \mathcal{O}) \equiv \mathsf{succ}(\mathcal{O})$

e) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\mathcal{E} \models \mathsf{plus}(\mathsf{succ}^n(\mathcal{O}), \mathcal{O}) \equiv \mathsf{succ}^n(\mathcal{O})$

f) Es gibt ein Modell A mit Träger $\{a\}$ und ein Termgleichungssystem $\mathcal{E}'$ mit $A \not\models \mathcal{E}'$.

Aufgabe 3 **(2+1 Punkte)**

a) Zwei Terme s und t heißen unifizierbar gdw. eine Substitution σ existiert, so dass $s\sigma = t\sigma$. Beweisen oder widerlegen Sie:

- s matcht $t \Rightarrow s$ und t sind unifizierbar
- s und t sind unifizierbar $\Rightarrow s$ matcht t oder t matcht s

b) Für zwei Substitutionen σ_1, σ_2 ist die Komposition $\sigma_1\sigma_2$ definiert als die Substitution mit $(\sigma_1\sigma_2)(x) = \sigma_2(\sigma_1(x))$. Zeigen Sie, dass Komposition von Substitutionen assoziativ ist, d.h. dass $(\sigma_1\sigma_2)\sigma_3 = \sigma_1(\sigma_2\sigma_3)$ gilt.