Prof. Dr. Jürgen Giesl
René Thiemann

# Übungen *Termersetzungssysteme* – Blatt 13

Abgabe am Mittwoch, den 28.7.2004, zu Beginn der Übung.

## Aufgabe 1 (6 Punkte)

Wenden Sie den Algorithmus BASIC_COMPLETION auf die folgenden Termgleichungssysteme an. Wählen Sie dabei jeweils eine geeignete Reduktionsordnung $\succ$.

a)
$$\begin{aligned} \mathsf{f}(x,y) &\equiv \mathsf{g}(x)\\ \mathsf{f}(x,y) &\equiv \mathsf{g}(y)\\ \mathsf{g}(\mathsf{s}(x)) &\equiv \mathsf{a}\\ \mathsf{h}(x,y) &\equiv \mathsf{s}(x)\\ \mathsf{h}(x,x) &\equiv x \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} \mathsf{f}(\mathsf{f}(x)) &\equiv \mathsf{f}(x)\\ \mathsf{f}(\mathsf{f}(x)) &\equiv \mathsf{g}(x)\\ \mathsf{g}(\mathsf{f}(x)) &\equiv x \end{aligned}$$

c)
$$\mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{f}(x))) \equiv \mathsf{g}(\mathsf{f}(x))$$

## Aufgabe 2 (4 Punkte)

Vervollständigen Sie die Termgleichungssysteme a) und b) aus Aufgabe 1 mit dem verbesserten Verfahren aus Abschnitt 6.2. Wenden Sie hierzu die Transformationsregeln aus Definition 6.2.2 in geeigneter Weise an. Die Sequenz der Transformationen muss dabei *fair* sein, d.h. für alle Regeln des finalen TES müssen die kritischen Paare einmal generiert worden sein.

## Aufgabe 3 (2 Punkte)

Ein Termersetzungssystem $\mathcal{R}$ heiße *linksreduziert*, wenn für alle $l \to r \in \mathcal{R}$ gilt, dass $l$ bzgl. $\mathcal{R} \setminus \{l \to r\}$ in Normalform ist. Ein Termersetzungssystem heiße *Grundterm-*

*ersetzungssystem*, wenn für alle $l \to r \in \mathcal{R}$ gilt, dass $\mathcal{V}(l) = \emptyset$.

Zeigen Sie, dass jedes linksreduzierte und terminierende Grundtermersetzungssystem konfluent ist.

## Aufgabe 4 **(8+1 Punkte)**

Das folgende Termgleichungssystem $\mathcal{E}$ ist eine Variante des Termgleichungssystems für Gruppen (es wurde nur die dritte Gleichung gedreht). Die letzte Gleichung $(*)$ ist eine Konsequenz der ersten drei und wurde hier direkt hinzugefügt, um die Aufgabe zu vereinfachen.

$$\begin{array}{rcll} \mathsf{f}(x,\mathsf{f}(y,z)) & \equiv & \mathsf{f}(\mathsf{f}(x,y),z) & \\ \mathsf{f}(x,\mathsf{e}) & \equiv & x & \\ \mathsf{f}(\mathsf{i}(x),x) & \equiv & \mathsf{e} & \\ \mathsf{i}(\mathsf{f}(x,y)) & \equiv & \mathsf{f}(\mathsf{i}(y),\mathsf{i}(x)) & \qquad (*) \end{array}$$

a) Erzeugen Sie mit dem verbesserten Vervollständigungsverfahren ein zu $\mathcal{E}$ äquivalentes, konvergentes TES $\mathcal{R}$. Nutzen Sie hierzu $\succ_{LPOS}$ mit der Präzedenz $\mathsf{i} \sqsupset \mathsf{f} \sqsupset \mathsf{e}$ und dem Status $\tau(\mathsf{f}) = \langle 2, 1\rangle$ als Reduktionsordnung. Um den Aufwand der Vervollständigung zu reduzieren, brauchen Sie keine kritischen Paare mit der Regel bilden, die aus Gleichung $(*)$ entsteht.

   Hinweis: $\mathcal{R}$ enthält genau 9 Regeln aus Termen mit maximal 3 Funktionssymbolen und 3 Variablen. Die Regeln, die Sie erzeugen müssen, sind also eher klein. In einer optimalen Reduktionsfolge erzeugen Sie genau die benötigten Regeln, Sie brauchen also niemals **Reduziere-{Links/Rechts}** anwenden.

b) Zeigen Sie, dass $\mathcal{E}$ nicht die Klasse der Gruppen spezifiziert, indem Sie eine Gleichung finden, die in Gruppen gilt, jedoch nicht aus $\mathcal{E}$ folgt.