

Prof. Dr. Jürgen Giesl
René Thiemann

Übungen *Termersetzungssysteme* – Blatt 2

Abgabe am Mittwoch, den 5.5.2004, zu Beginn der Übung.

Aufgabe 1 (2 Punkte)

Um den Nutzen von Lemma 3.1.4 und 3.1.8 (Stabilität und Monotonie von $\equiv_{\mathcal{E}}$) zu sehen, betrachten wir nochmals das Termgleichungssystem \mathcal{E} aus Aufgabe 2 des letzten Blattes

$$\begin{aligned}\text{plus}(\mathcal{O}, y) &\equiv y \\ \text{plus}(\text{succ}(x), y) &\equiv \text{succ}(\text{plus}(x, y))\end{aligned}$$

Beweisen Sie ein weiteres Mal für alle $n \in \mathbb{N}$ die bekannte Aussage

$$\mathcal{E} \models \text{plus}(\text{succ}^n(\mathcal{O}), \mathcal{O}) \equiv \text{succ}^n(\mathcal{O}).$$

Führen Sie hierzu einen Induktionsbeweis, der ausschließlich die oben genannten Lemmata und den Zusammenhang $\mathcal{E} \models u \equiv v$ für alle $u \equiv v \in \mathcal{E}$ verwendet.

Aufgabe 2 (2+2+2 Punkte)

Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

Für alle Terme t und p und für jede Substitution σ gilt

- Falls $\pi \in \text{Occ}(t)$, dann gilt $t\sigma|_{\pi} = t|_{\pi}\sigma$.
- Falls $\pi \in \text{Occ}(t)$, dann gilt $t\sigma[p]_{\pi} = t[p]_{\pi}\sigma$.
- Falls $\pi_1, \pi_2 \in \text{Occ}(t)$, $\pi_1 \perp \pi_2$, dann gilt $t|_{\pi_1} = t[p]_{\pi_2}|_{\pi_1}$.

Aufgabe 3 (2+2+2+2 Punkte)

Welche der folgenden binären Relationen \sim_i über Termen sind stabil? Welche sind monoton? Begründen Sie kurz, warum die Eigenschaft gilt, oder geben Sie ein Gegenbeispiel an.

- $s \sim_1 t$ gdw. die Anzahl der Funktionssymbole in s gleich der in t ist.
- $s \sim_2 t$ gdw. $\mathcal{V}(s) \subseteq \mathcal{V}(t)$.
- $s \sim_3 t$ gdw. s ein Teilterm von t ist.
- $s \sim_4 t$ gdw. s den Term t matcht.