

Prof. Dr. Jürgen Giesl
René Thiemann

Übungen *Termersetzungssysteme* – Blatt 7

Abgabe am Mittwoch, den 16.6.2004, zu Beginn der Übung.

Aufgabe 1 (6 + 2 Punkte)

Gegeben sei das Termgleichungssystem \mathcal{E}

$$\begin{aligned}f(d, x) &\equiv b(x) \\e(x) &\equiv c(x) \\c(d) &\equiv f(x, a(x)) \\b(x) &\equiv d \\g(c(g(x))) &\equiv g(g(x)) \\d &\equiv e(d)\end{aligned}$$

- a) Richten Sie die Gleichungen aus \mathcal{E} , so dass ein konvergentes TES \mathcal{R} entsteht (ohne Beweis). Begründen Sie kurz für jede Gleichung, warum Sie diese nicht andersherum ausgerichtet haben.

Hinweis: Es gibt genau eine Ausrichtung, die zu einem konvergenten TES führt.

- b) Entscheiden Sie folgende Äquivalenzen mit dem Algorithmus WORTPROBLEM.

$$\begin{aligned}g(f(d, c(b(y)))) &\equiv_{\mathcal{E}} g(g(b(z))) \\f(g(c(g(x))), a(g(g(x)))) &\equiv_{\mathcal{E}} f(f(b(x), a(d)), a(d))\end{aligned}$$

Aufgabe 2 (1 + 3 Punkte)

Gegeben sei das TES \mathcal{R}

$$d(0) \rightarrow 0$$

$$\begin{aligned}
d(s(x)) &\rightarrow s(s(d(x))) \\
h(0) &\rightarrow 0 \\
h(s(0)) &\rightarrow 0 \\
h(s(s(x))) &\rightarrow s(h(x)) \\
g(x, 0) &\rightarrow \text{true} \\
g(0, s(y)) &\rightarrow \text{false} \\
g(s(x), s(y)) &\rightarrow g(x, y)
\end{aligned}$$

- a) Was berechnen die Funktionen d , h und g ?
- b) Beweisen Sie induktiv: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $g(s^n(0), d(h(s^n(0)))) \rightarrow_{\mathcal{R}}^* \text{true}$.
Geben Sie explizit an, welche Induktionsrelation \succ Sie benutzt haben.

Aufgabe 3 (5 Punkte)

Gegeben sei das folgende TES, welches die Ackermann-Funktion berechnet

$$\begin{aligned}
\text{ack}(0, y) &\rightarrow s(y) \\
\text{ack}(s(x), 0) &\rightarrow \text{ack}(x, s(0)) \\
\text{ack}(s(x), s(y)) &\rightarrow \text{ack}(x, \text{ack}(s(x), y))
\end{aligned}$$

Sei $N = \{0, s(0), s(s(0)), \dots\}$. Zeigen Sie mittels noetherscher Induktion, dass für je zwei Terme $t_1, t_2 \in N$ der Term $\text{ack}(t_1, t_2)$ zu einer Normalform aus N reduziert werden kann. Benutzen Sie dazu eine geeignete Induktionsrelation $\succ \subseteq (N \times N)^2$ und beweisen Sie auch, dass die gewählte Relation \succ fundiert ist.