RHEINISCH-
WESTFÄLISCHE
TECHNISCHE
HOCHSCHULE
AACHEN

LEHR- UND FORSCHUNGSGEBIET INFORMATIK II

RWTH Aachen · D-52056 Aachen · GERMANY
http://www-i2.informatik.rwth-aachen.de/lufgi2

LuFG Informatik II

Prof. Dr. Jürgen Giesl
René Thiemann

Übungen *Termersetzungssysteme* – Blatt 9

Abgabe am Mittwoch, den 30.6.2004, zu Beginn der Übung.

Aufgabe 1 (4*+4,5 Punkte)

Eine Erweiterung der LPO ist die LPOS (LPO mit Status), bei der man zusätzlich zur Präzendenz $\sqsupset$ einen Status τ angibt, der jedem n-stelligen Funktionssymbol f eine Permutation π_f über $\{1,\ldots,n\}$ zuordnet. Also gilt $\tau(f) = \pi_f = \langle j_1,\ldots,j_n\rangle$ mit $\{j_1,\ldots,j_n\} = \{1,\ldots,n\}$. In der LPOS werden dann die Argumente von f im Fall 3) nicht wie bei der LPO immer von links nach rechts, sondern in der von π_f festgelegten Reihenfolge verglichen.

Sei nun $\sqsupset$ eine Präzedenz und τ ein Status. Dann gilt $s \succ_{lpos} t$ gdw. $s = f(s_1,\ldots,s_n)$, $\tau(f) = \langle j_1,\ldots,j_n\rangle$ und eine der folgenden Aussagen zutrifft.

1) $s_i \succeq_{lpos} t$ für ein $i \in \{1,\ldots,n\}$
2) $t = g(t_1,\ldots,t_m)$, $f \sqsupset g$ und $s \succ_{lpos} t_i$ für alle $i \in \{1,\ldots,m\}$
3) $t = f(t_1,\ldots,t_n)$ und es ex. ein $i \in \{1,\ldots,n\}$, so dass
$s_{j_1} = t_{j_1},\ldots,s_{j_{i-1}} = t_{j_{i-1}}, s_{j_i} \succ_{lpos} t_{j_i}, s \succ_{lpos} t_{j_{i+1}},\ldots, s \succ_{lpos} t_{j_n}$

Wie üblich bezeichnet $\succeq_{lpos}$ den reflexiven Abschluss von $\succ_{lpos}$.

a*) Beweisen Sie die Transitivität von $\succ_{lpos}$. Hinweise: Zeigen Sie zunächst, dass wenn $s \succ_{lpos} t = g(t_1,\ldots,t_m)$ wegen Fall 2) oder 3) gilt, dann auch $s \succ_{lpos} t_i$ für alle $i \in \{1,\ldots,m\}$ gilt. Benutzen Sie dann Induktion über $\rhd^3_{lex}$ für die eigentliche Aussage.

b) Beweisen Sie die Terminierung der folgenden zwei TES. Nutzen Sie, wenn möglich, die LPO, sonst die LPOS.

*Zusatzpunkte für die Transitivität

$$\begin{array}{rcl}
\mathsf{ack}(0, y) & \to & \mathsf{s}(y) \\
\mathsf{ack}(\mathsf{s}(x), 0) & \to & \mathsf{ack}(x, \mathsf{s}(0)) \\
\mathsf{ack}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \mathsf{ack}(x, \mathsf{ack}(\mathsf{s}(x), y))
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rcl}
\mathsf{plus}(x, 0) & \to & x \\
\mathsf{plus}(x, \mathsf{s}(y)) & \to & \mathsf{plus}(\mathsf{s}(x), y) \\
\mathsf{times}(x, y) & \to & \mathsf{t}(x, 0, y) \\
\mathsf{t}(0, y, z) & \to & y \\
\mathsf{t}(x, y, 0) & \to & y \\
\mathsf{t}(\mathsf{s}(x), y, z) & \to & \mathsf{t}(x, \mathsf{plus}(y, z), z) \\
\mathsf{t}(x, y, \mathsf{s}(z)) & \to & \mathsf{t}(x, \mathsf{plus}(x, y), z)
\end{array}$$

Aufgabe 2 **(3+5,5 Punkte)**

Eine andere Erweiterung der LPO ist die QLPO, in der Quasi-Präzedenzen erlaubt werden. Die Idee dabei ist es, manche Funktionssymbole als gleichwertig in ihrer Präzedenz zu behandeln. Formal ist eine Quasi-Präzendenz $\sqsupseteq$ eine reflexive und transitive Relation über den Funktionssymbolen. Die strikte Relation $\sqsupset$ ist dann definiert als $f \sqsupset g$ gdw. $f \sqsupseteq g$ und $g \not\sqsupseteq f$ gilt. Zwei Funktionssymbole f und g sind äquivalent ($f \equiv g$) gdw. $f \sqsupseteq g$ und $g \sqsupseteq f$ gilt. Wir erlauben hier nur Äquivalenzen zwischen Symbolen gleicher Stelligkeit.

Zur Repräsentation einer Quasi-Präzedenz eignet sich eher die Sichtweise einer (nicht-quasi) Präzedenz $\sqsupset$ über $\equiv$-Äquivalenzklassen der Signatur. Dann würde z.B. die Quasi-Präzendenz $\{f_1 \equiv f_2\} \sqsupset \{g_1 \equiv g_2 \equiv g_3\} \sqsupset \{h\}$ bedeuten, dass alle f_i zueinander äquivalent sind, also in $\equiv$-Beziehung stehen, genauso wie alle g_j Symbole äquivalent sind. Desweiteren gilt die strikte Beziehung $f_i \sqsupset g_j \sqsupset h$ für beliebige i und j.

Um nun die QLPO zu definieren benötigen wir zunächst eine Äquivalenzrelation $\sim$ über Termen. Es gilt $s \sim t$ gdw.

- $s = t$ oder
- $s = f(s_1, \ldots, s_n), t = g(t_1, \ldots, t_n), f \equiv g$ und $s_i \sim t_i$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$

Für zwei Terme s und t bedeutet $s \sim t$ also, dass sich s von t nur dadurch unterscheidet, dass man manche Funktionssymbole f durch andere Funktionssymbole g mit $f \equiv g$ ersetzt hat.

Sei nun $\sqsupseteq$ eine beliebige, aber feste Quasi-Präzedenz. Dann gilt $s \succ_{qlpo} t$ gdw. $s = f(s_1, \ldots, s_n)$ und eine der folgenden Aussagen zutrifft.

1) $s_i \succsim_{qlpo} t$ für ein $i \in \{1, \ldots, n\}$

2) $t = g(t_1, \ldots, t_m)$, $f \sqsupset g$ und $s \succ_{qlpo} t_i$ für alle $i \in \{1, \ldots, m\}$

3) $t = g(t_1, \ldots, t_n)$, $f \equiv g$ und es ex. ein $i \in \{1, \ldots, n\}$, so dass $s_1 \sim t_1, \ldots, s_{i-1} \sim t_{i-1}, s_i \succ_{qlpo} t_i, s \succ_{qlpo} t_{i+1}, \ldots, s \succ_{qlpo} t_n$

Hierbei bezeichnet $\succsim_{qlpo} = \succ_{qlpo} \cup \sim$.

a) Beweisen Sie die Monotonie von $\succ_{qlpo}$.

b) Beweisen Sie die Terminierung der folgenden zwei TES. Nutzen Sie, wenn möglich, die LPO, sonst die QLPO.

$$
\begin{aligned}
\mathsf{plus}(x, \mathsf{s}(y)) &\to \mathsf{s}(\mathsf{add}(x, y)) \\
\mathsf{plus}(x, \mathsf{0}) &\to x \\
\mathsf{add}(\mathsf{s}(x), y) &\to \mathsf{plus}(x, \mathsf{s}(y)) \\
\mathsf{add}(\mathsf{0}, y) &\to y
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathsf{not}(\mathsf{true}) &\to \mathsf{false} \\
\mathsf{not}(\mathsf{false}) &\to \mathsf{true} \\
\mathsf{even}(\mathsf{s}(x)) &\to \mathsf{not}(\mathsf{odd}(x)) \\
\mathsf{even}(\mathsf{0}) &\to \mathsf{true} \\
\mathsf{odd}(\mathsf{s}(x)) &\to \mathsf{not}(\mathsf{even}(x)) \\
\mathsf{odd}(\mathsf{0}) &\to \mathsf{false}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 3 **(3+4 Punkte)**

Geben Sie eine sinnvolle Definition der QLPOS an, die auf einer Quasi-Präzedenz und einem Status basiert, die also beide Erweiterungen aus Aufgabe 1 und 2 vereinigt. Beweisen Sie dann die Terminierung des folgenden TES mit $\succ_{qlpos}$.

$$
\begin{aligned}
\mathsf{plus}(\mathsf{s}(x), y) &\to \mathsf{s}(\mathsf{plus}(x, y)) \\
\mathsf{plus}(\mathsf{0}, y) &\to y \\
\mathsf{add}(x, \mathsf{0}) &\to x \\
\mathsf{add}(x, \mathsf{s}(y)) &\to \mathsf{add}(\mathsf{s}(x), y) \\
\mathsf{plus}(x, \mathsf{s}(y)) &\to \mathsf{add}(y, x) \\
\mathsf{add}(\mathsf{s}(x), y) &\to \mathsf{plus}(y, x) \\
\mathsf{plus}(\mathsf{add}(x, y), z) &\to \mathsf{add}(\mathsf{plus}(x, z), y)
\end{aligned}
$$