Definition 6.3.9 (Induktionsbeweisverfahren [HH82])

$\mathcal{E}$ Gleichungssystem, $\mathcal{R}$ TES über Σ und $\mathcal{V}$, $\Sigma^c \subseteq \Sigma$, $\succ$ Reduktionsordnung.

Induktionsbeweiskalkül: Vervollständigungsverfahren (Def. 6.2.2),
"*Orientieren*" geändert, "*Inkonsistenz*" und "*Injektivität*" ergänzt:

Orientieren $\dfrac{\mathcal{E} \cup \{s \equiv t\}, \mathcal{R}}{\mathcal{E}, \mathcal{R} \cup \{s \to t\}}$ falls $s \succ t$ und $s = f(\ldots)$ mit $f \notin \Sigma^c$

$\dfrac{\mathcal{E} \cup \{s \equiv t\}, \mathcal{R}}{\mathcal{E}, \mathcal{R} \cup \{t \to s\}}$ falls $t \succ s$ und $t = f(\ldots)$ mit $f \notin \Sigma^c$

Inkonsistenz $\dfrac{\mathcal{E} \cup \{s \equiv t\}, \mathcal{R}}{\text{“}\mathit{False}\text{”}}$ falls $s = c_1(\ldots)$, $t = c_2(\ldots)$ für $c_1, c_2 \in \Sigma^c$ mit $c_1 \neq c_2$
oder $s = c(\ldots)$ und $t \in \mathcal{V}$ für $c \in \Sigma^c$
oder $t = c(\ldots)$ und $s \in \mathcal{V}$ für $c \in \Sigma^c$

Injektivität $$\frac{\mathcal{E} \cup \{c(s_1, \ldots, s_n) \equiv c(t_1, \ldots, t_n)\}, \mathcal{R}}{\mathcal{E} \cup \{s_1 \equiv t_1, \ldots, s_n \equiv t_n\}, \mathcal{R}}$$

$(\mathcal{E}, \mathcal{R}) \vdash_I (\mathcal{E}', \mathcal{R}')$, falls $(\mathcal{E}, \mathcal{R})$ durch eine Transformationsregel in $(\mathcal{E}', \mathcal{R}')$ überführt wird.

Bsp. 6.3.10

$$\mathcal{E}: \quad \begin{aligned} \mathsf{plus}(\mathcal{O}, y) &\equiv y \\ \mathsf{plus}(\mathsf{succ}(x), y) &\equiv \mathsf{succ}(\mathsf{plus}(x, y)) \end{aligned} \qquad \mathcal{R}: \quad \begin{aligned} \mathsf{plus}(\mathcal{O}, y) &\to y \\ \mathsf{plus}(\mathsf{succ}(x), y) &\to \mathsf{succ}(\mathsf{plus}(x, y)) \end{aligned}$$

Untersuche $\mathcal{E} \models_I \mathsf{plus}(x, \mathsf{succ}(y)) \equiv \mathsf{succ}(\mathsf{plus}(x, y))$

Regel	$\mathcal{E}_i$	$\mathcal{R}_i \setminus \mathcal{R}$
	$\mathsf{plus}(x, \mathsf{succ}(y)) \equiv \mathsf{succ}(\mathsf{plus}(x, y))$	
Orientieren		$\mathsf{plus}(x, \mathsf{succ}(y)) \to \mathsf{succ}(\mathsf{plus}(x, y))$
Generieren	$\mathsf{succ}(y) \equiv \mathsf{succ}(\mathsf{plus}(\mathcal{O}, y))$	$\mathsf{plus}(x, \mathsf{succ}(y)) \to \mathsf{succ}(\mathsf{plus}(x, y))$
Reduz.-Gleichung	$\mathsf{succ}(y) \equiv \mathsf{succ}(y)$	$\mathsf{plus}(x, \mathsf{succ}(y)) \to \mathsf{succ}(\mathsf{plus}(x, y))$
Löschen		$\mathsf{plus}(x, \mathsf{succ}(y)) \to \mathsf{succ}(\mathsf{plus}(x, y))$
Generieren	$\mathsf{succ}(\mathsf{plus}(x, \mathsf{succ}(y))) \equiv \mathsf{succ}(\mathsf{plus}(\mathsf{succ}(x), y))$	$\mathsf{plus}(x, \mathsf{succ}(y)) \to \mathsf{succ}(\mathsf{plus}(x, y))$
Reduz.-Gleichung	$\mathsf{succ}(\mathsf{succ}(\mathsf{plus}(x, y))) \equiv \mathsf{succ}(\mathsf{plus}(\mathsf{succ}(x), y))$	$\mathsf{plus}(x, \mathsf{succ}(y)) \to \mathsf{succ}(\mathsf{plus}(x, y))$
Reduz.-Gleichung	$\mathsf{succ}(\mathsf{succ}(\mathsf{plus}(x, y))) \equiv \mathsf{succ}(\mathsf{succ}(\mathsf{plus}(x, y)))$	$\mathsf{plus}(x, \mathsf{succ}(y)) \to \mathsf{succ}(\mathsf{plus}(x, y))$
Löschen		$\mathsf{plus}(x, \mathsf{succ}(y)) \to \mathsf{succ}(\mathsf{plus}(x, y))$

Bsp. 6.3.11

$$\mathcal{E}: \quad \begin{aligned} \mathsf{plus}(\mathcal{O}, y) &\equiv y \\ \mathsf{plus}(\mathsf{succ}(x), y) &\equiv \mathsf{succ}(\mathsf{plus}(x, y)) \end{aligned} \qquad \mathcal{R}: \quad \begin{aligned} \mathsf{plus}(\mathcal{O}, y) &\to y \\ \mathsf{plus}(\mathsf{succ}(x), y) &\to \mathsf{succ}(\mathsf{plus}(x, y)) \end{aligned}$$

Untersuche $\mathcal{E} \models_I \mathsf{plus}(\mathsf{succ}(x), y) \equiv \mathsf{succ}(\mathcal{O})$

Regel	$\mathcal{E}_i$	$\mathcal{R}_i \setminus \mathcal{R}$
	$\mathsf{plus}(\mathsf{succ}(x), y) \equiv \mathsf{succ}(\mathcal{O})$	
Orientieren		$\mathsf{plus}(\mathsf{succ}(x), y) \to \mathsf{succ}(\mathcal{O})$
Generieren	$\mathsf{succ}(\mathsf{plus}(x, y)) \equiv \mathsf{succ}(\mathcal{O})$	$\mathsf{plus}(\mathsf{succ}(x), y) \to \mathsf{succ}(\mathcal{O})$
Injektivität	$\mathsf{plus}(x, y) \equiv \mathcal{O}$	$\mathsf{plus}(\mathsf{succ}(x), y) \to \mathsf{succ}(\mathcal{O})$
Orientieren		$\mathsf{plus}(\mathsf{succ}(x), y) \to \mathsf{succ}(\mathcal{O}),\ \mathsf{plus}(x, y) \to \mathcal{O}$
Generieren	$y \equiv \mathcal{O}$	$\mathsf{plus}(\mathsf{succ}(x), y) \to \mathsf{succ}(\mathcal{O}),\ \mathsf{plus}(x, y) \to \mathcal{O}$
Inkonsistenz	"*False*"	

Lemma 6.3.12 (Eigenschaften von $\vdash_I$)

Sei $(\mathcal{E}, \mathcal{R}) \vdash_I (\mathcal{E}', \mathcal{R}')$.

(a) Es gilt $\leftrightarrow^*_{\mathcal{E} \cup \mathcal{R}} \subseteq \leftrightarrow^*_{\mathcal{E}' \cup \mathcal{R}'}$.

(b) Falls

- für alle $t \in \mathcal{T}(\Sigma)$ ein $q \in \mathcal{T}(\Sigma^c)$ mit $t \leftrightarrow^*_{\mathcal{E} \cup \mathcal{R}} q$ existiert
- und es keine $q_1 \neq q_2$ aus $\mathcal{T}(\Sigma^c)$ mit $q_1 \leftrightarrow^*_{\mathcal{E} \cup \mathcal{R}} q_2$ gibt,

dann gilt für alle $s, t \in \mathcal{T}(\Sigma)$ mit $s \leftrightarrow^*_{\mathcal{E}' \cup \mathcal{R}'} t$ auch $s \leftrightarrow^*_{\mathcal{E} \cup \mathcal{R}} t$.

(c) Falls $l \notin \mathcal{T}(\Sigma^c, \mathcal{V})$ für alle $l \to r \in \mathcal{R}$ gilt,
so gilt auch $l \notin \mathcal{T}(\Sigma^c, \mathcal{V})$ für alle $l \to r \in \mathcal{R}'$.