Prof. Dr. Jürgen Giesl
Peter Schneider-Kamp, Stephan Swiderski, René Thiemann

Übungen *Termersetzungssysteme* – Blatt 10

Abgabe am Dienstag, dem 17.1.2007, zu Beginn der Übung.

Aufgabe 1 (4 + 2 + 4 Punkte)

Ein Matchingproblem $\mathcal{M}$ ist eine endliche Menge von Termungleichungen

$$\{s_1 \precsim^? t_1, \ldots, s_n \precsim^? t_n\}$$

Eine Substitution σ ist Lösung des Problems $\mathcal{M}$, wenn $s_i\sigma = t_i$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$ gilt (σ heißt dann auch Matcher von $\mathcal{M}$). Die Menge $\mathcal{M}atch(\mathcal{M})$ bezeichnet die Menge aller Matcher von $\mathcal{M}$.

Ein Matching-Problem $\mathcal{M}$ ist in *gelöster Form* gdw. $\mathcal{M}$ die Gestalt $\{x_1 \precsim^? t_1, \ldots, x_n \precsim^? t_n\}$ hat, wobei die x_i paarweise verschiedene Variablen sind. Die zugehörige Lösung ist dann definiert als die Substitution $\sigma_{\mathcal{M}} = \{x_1/t_1, \ldots, x_n/t_n\}$.

a) Geben Sie eine Menge von Transformationsregeln $\mathcal{M} \Longrightarrow \mathcal{M}'$ an, die ähnlich aufgebaut sind wie die Unifikations-Transformationsregeln und dabei einen direkten Matchingalgorithmus ergeben. Die Regeln sollten nicht nur - wie bei der Unifikation - auf Mengen operieren, sondern sie können auch zum Ergebnis $\perp$ führen, das für einen Fehlschlag steht. Die Anwendung der Regeln sollte dann entweder zu $\perp$ führen, oder in einem gelöstem Matchingproblem $\mathcal{M}'$ resultieren.

   Es ist nicht erlaubt, dass Ihre Transformationsregeln zusätzliche Konstanten einführen, um etwa Matching durch Unifikation zu lösen.

b) Wenden Sie Ihre Regeln auf die folgenden Matchingprobleme an:

   - $\{\mathsf{h}(\mathsf{f}(x, y), \mathsf{g}(y, x), x) \precsim^? \mathsf{h}(\mathsf{f}(x, \mathsf{a}), \mathsf{g}(\mathsf{a}, x), y)\}$
   - $\{\mathsf{f}(\mathsf{f}(x, y), \mathsf{f}(\mathsf{a}, x)) \precsim^? \mathsf{f}(\mathsf{f}(\mathsf{f}(x, y), \mathsf{g}(y)), \mathsf{f}(\mathsf{a}, \mathsf{f}(x, y)))\}$

c) Zeigen Sie die Korrektheit Ihrer Transformationsregeln, indem Sie folgende Aussagen beweisen.

- Jede Normalform bzgl. $\Longrightarrow$ ist entweder $\perp$ oder in gelöster Form.
- Falls $\mathcal{M} \Longrightarrow \mathcal{M}'$, dann gilt $\mathcal{M}atch(\mathcal{M}) = \mathcal{M}atch(\mathcal{M}')$.
(Hierbei sei $\mathcal{M}atch(\perp) = \emptyset$.)

Aufgabe 2 (4 × 1,5 Punkte)

Betrachten Sie die folgenden Termersetzungssysteme und begründen Sie für jedes TES kurz, ob es

a) konfluent,

b) lokal konfluent, aber nicht konfluent oder

c) nicht lokal konfluent ist.

$$\mathcal{R}_1 = \left\{ \begin{array}{rcll} \mathsf{choose}_i(0) & \to & \mathsf{s}^i(0) & \mid\ i \in \{0,1,2,3\} \\ \mathsf{choose}_i(\mathsf{s}(x)) & \to & \mathsf{choose}_{(i+1)\ mod\ 4}(x) & \mid\ i \in \{0,1,2,3\} \end{array} \right\}$$

$$\mathcal{R}_2 = \left\{ \begin{array}{lcll} \mathsf{choose}_i & \to & \mathsf{s}^i(0) & \mid\ i \in \{0,1,2,3\} \\ \mathsf{choose}_i & \to & \mathsf{choose}_{(i+1)\ mod\ 4} & \mid\ i \in \{0,1,2,3\} \end{array} \right\}$$

$$\mathcal{R}_3 = \mathcal{R}_1 \cup \left\{ \begin{array}{rcl} \mathsf{critical} & \to & \mathsf{even}(\mathsf{choose}_0(\mathsf{s}^i(0)))\ \mid\ i \in \mathbb{N} \\ \mathsf{even}(0) & \to & \mathsf{true} \\ \mathsf{even}(\mathsf{s}(0)) & \to & \mathsf{false} \\ \mathsf{even}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(x))) & \to & \mathsf{even}(x) \end{array} \right\}$$

$$\mathcal{R}_4 = \mathcal{R}_1 \cup \left\{ \begin{array}{rcl} \mathsf{critical} & \to & \mathsf{ge}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))), \mathsf{choose}_0(\mathsf{s}^i(0)))\ \mid\ i \in \mathbb{N} \\ \mathsf{ge}(x,0) & \to & \mathsf{true} \\ \mathsf{ge}(0,\mathsf{s}(y)) & \to & \mathsf{false} \\ \mathsf{ge}(\mathsf{s}(x),\mathsf{s}(y)) & \to & \mathsf{ge}(x,y) \end{array} \right\}$$

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Ein Relation $\to$ heißt *stark konfluent*, gdw. es zu jeder Reduktion $t_1 \leftarrow s_1 \to t_2$ einen Term s_2 mit $t_1 \to^= s_2 \leftarrow^= t_2$ gibt. Hier ist $s \to^= t$ definiert als $s = t$ oder $s \to t$. Beweisen Sie, dass aus starker Konfluenz die Konfluenz folgt.