RHEINISCH-
WESTFÄLISCHE
TECHNISCHE
HOCHSCHULE
AACHEN

LEHR- UND FORSCHUNGSGEBIET INFORMATIK II
RWTH Aachen · D-52056 Aachen · GERMANY
http://www-i2.informatik.rwth-aachen.de/lufgi2/tes06/

Prof. Dr. Jürgen Giesl
Peter Schneider-Kamp, Stephan Swiderski, René Thiemann

Übungen *Termersetzungssysteme* – Blatt 13

Abgabe am Dienstag, dem 6.2.2007, zu Beginn der Übung.

Aufgabe 1 (3 Punkte)

Wenden Sie den Algorithmus BASIC_COMPLETION auf die folgenden Termgleichungssysteme an. Wählen Sie dabei jeweils eine geeignete Reduktionsordnung $\succ$.

a) $$\mathcal{E}_1 = \left\{ \begin{array}{rcl} \mathsf{f}(x,y) & \equiv & \mathsf{g}(x) \\ \mathsf{f}(x,y) & \equiv & \mathsf{g}(y) \\ \mathsf{g}(\mathsf{s}(x)) & \equiv & \mathsf{a} \\ \mathsf{h}(x,y) & \equiv & \mathsf{s}(x) \\ \mathsf{h}(x,x) & \equiv & x \end{array} \right\}$$

b) $$\mathcal{E}_2 = \left\{ \begin{array}{rcl} \mathsf{g}(\mathsf{h}(x)) & \equiv & \mathsf{f}(\mathsf{g}(x)) \\ \mathsf{h}(\mathsf{g}(x)) & \equiv & \mathsf{g}(\mathsf{h}(x)) \end{array} \right\}$$

Aufgabe 2 (2 Punkte)

Vervollständigen Sie das Termgleichungssystem $\mathcal{E}_1$ aus Aufgabe 1 mit dem verbesserten Verfahren aus Abschnitt 6.2. Wenden Sie hierzu die Transformationsregeln aus Definition 6.2.2 in geeigneter Weise an.

Aufgabe 3 (2 Punkte)

Nutzen Sie das Verfahren BASIC_COMPLETION als Semi-Entscheidungsverfahren für das Termgleichungssystem $\mathcal{E}_2$ aus Aufgabe 1. Verwenden Sie dabei $\succ_{LPO}$ mit Präzedenz $\mathsf{f} \sqsupset \mathsf{g} \sqsupset \mathsf{h}$ als Reduktionsordnung, und überprüfen Sie, ob

$$\mathsf{f}(\mathsf{f}(\mathsf{h}(\mathsf{h}(\mathsf{h}(\mathsf{g}(\mathsf{a})))))) \equiv \mathsf{f}(\mathsf{h}(\mathsf{h}(\mathsf{h}(\mathsf{h}(\mathsf{g}(\mathsf{a}))))))$$

aus $\mathcal{E}_2$ folgt.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Beweisen Sie, dass die die Äquivalenz zweier endlicher konvergenter TESe $\mathcal{R}_0$ und $\mathcal{R}_1$ entscheidbar ist. Beweisen Sie dazu die folgende Hilfsaussage:

$\mathcal{R}_0$ und $\mathcal{R}_1$ sind äquivalent gdw. für alle $i \in \{0,1\}$ und alle Regeln $\ell \to r \in \mathcal{R}_i$ die Terme ℓ und r in $\mathcal{R}_{1-i}$ zusammenführbar sind.

Hinweis: Zwei TES $\mathcal{R}_0$ und $\mathcal{R}_1$ heißen äquivalent gdw. $\leftrightarrow^*_{\mathcal{R}_0} = \leftrightarrow^*_{\mathcal{R}_1}$.

Aufgabe 5 (1+10 Punkte)

Das folgende Termgleichungssystem $\mathcal{E}$ ist eine Variante des Termgleichungssystems für Gruppen Es wurden nur die Argumente von f in Gleichung (2) vertauscht und Gleichung (4) wurde hinzugefügt.

$$\begin{aligned} \mathsf{f}(\mathsf{f}(x,y),z) &\equiv \mathsf{f}(x,\mathsf{f}(y,z)) && (1)\\ \mathsf{f}(\mathsf{e},x) &\equiv x && (2)\\ \mathsf{f}(x,\mathsf{i}(x)) &\equiv \mathsf{e} && (3)\\ \mathsf{i}(\mathsf{f}(x,y)) &\equiv \mathsf{f}(\mathsf{i}(y),\mathsf{i}(x)) && (4) \end{aligned}$$

Entscheiden Sie mit dem Verfahren aus Aufgabe 4, ob $\mathcal{E}$ äquivalent zu dem konvergenten TES $\{(G1){-}(G4), (G7), (G10){-}(G13), (G16)\}$ für Gruppen aus der Vorlesung ist. (siehe auch Folie 25 vom 26.1.)

Erzeugen Sie dazu mit dem verbesserten Vervollständigungsverfahren ein zu $\mathcal{E}$ äquivalentes, konvergentes TES $\mathcal{R}$. Nutzen Sie hierzu $\succ_{LPO}$ mit der Präzedenz $\mathsf{i} \sqsupset \mathsf{f} \sqsupset \mathsf{e}$ als Reduktionsordnung. Um den Aufwand der Vervollständigung zu reduzieren, brauchen Sie keine kritischen Paare bilden, an der eine der folgenden Regeln beteiligt ist. (Alle diese kritischen Paare sind in $\mathcal{R}$ zusammenführbar.)

$$\mathsf{i}(\mathsf{f}(x,y)) \to \mathsf{f}(\mathsf{i}(y),\mathsf{i}(x)) \qquad \mathsf{i}(\mathsf{e}) \to \mathsf{e} \qquad \mathsf{f}(\mathsf{i}(x),\mathsf{f}(x,y)) \to y$$

- $\mathcal{R}$ enthält genau 9 Regeln aus Termen mit maximal 3 Funktionssymbolen und 3 Variablen. Die Regeln, die Sie erzeugen müssen, sind also eher klein. In einer optimalen Reduktionsfolge erzeugen Sie genau die benötigten Regeln. Sie bräuchten also niemals **Reduziere-{Links/Rechts}** anwenden.
- Auch mit der obigen Einschränkung müssen immerhin 16 kritische Paare gebildet werden (insgesamt sind es 41).