Prof. Dr. Jürgen Giesl
Peter Schneider-Kamp, Stephan Swiderski, René Thiemann

Übungen *Termersetzungssysteme* – Blatt 4

Abgabe am Dienstag, dem 21.11.2006, zu Beginn der Übung.

Aufgabe 1 (6+3*+3 Punkte)

Ziel der Aufgabe ist es, ein Entscheidungsverfahren für die Allgemeingültigkeit von (implizit) allquantifizierten First-Order-Logik Formeln (FO-Formeln) zu entwickeln. FO-Formeln bestehen aus Termgleichungen und können mittels der Booleschen Operatoren $\neg, \vee, \wedge$ auf die übliche Art verbunden werden. Beispielsweise ist $\varphi = \neg\big(x \equiv \mathsf{f}(\mathsf{f}(x)) \wedge x \equiv \mathsf{f}(\mathsf{f}(\mathsf{f}(\mathsf{f}(\mathsf{f}(x)))))\big) \vee x \equiv \mathsf{f}(x)$ eine FO-Formel mit $x \in \mathcal{V}$. Für Interpretationen $I = (\mathcal{A}, \alpha, \beta)$ ist die Modellbeziehung für FO-Formeln in der üblichen Weise definiert:

- $I \models \varphi_1 \vee \varphi_2$ gdw. $I \models \varphi_1$ oder $I \models \varphi_2$
- $I \models \varphi_1 \wedge \varphi_2$ gdw. $I \models \varphi_1$ und $I \models \varphi_2$
- $I \models \neg\varphi$ gdw. $I \not\models \varphi$
- $I \models u \equiv v$ gdw. $I(u) = I(v)$

Eine FO-Formel φ heißt allgemeingültig gdw. für alle Interpretationen I der Zusammenhang $I \models \varphi$ gilt. φ heißt unerfüllbar gdw. es keine Interpretation I mit $I \models \varphi$ gibt.

a) Entwickeln Sie unter Nutzung des Kongruenzabschlussverfahrens ein Entscheidungsverfahren für die Allgemeingültigkeit von FO-Formeln. Hinweise:

   - Zeigen Sie, wie man die Allgemeingültigkeit von FO-Formeln mit Variablen auf die Allgemeingültigkeit von FO-Formeln ohne Variablen zurückführen kann.

- Führen Sie die Allgemeingültigkeit von FO-Formeln auf die Unerfüllbarkeit mehrerer Konjunktionen der Art

  $$u_1 \equiv v_1 \wedge \cdots \wedge u_n \equiv v_n \wedge \neg s_1 \equiv t_1 \wedge \cdots \wedge \neg s_m \equiv t_m$$

  zurück.
- Benutzen Sie das folgende Lemma für Grundterme s_i, t_i, u_j, v_j mit $i \in \{1, \ldots, m\}, j \in \{1, \ldots, n\}$:*
  Genau dann wenn $u_1 \equiv v_1 \wedge \cdots \wedge u_n \equiv v_n \wedge \neg s_1 \equiv t_1 \wedge \cdots \wedge \neg s_m \equiv t_m$ unerfüllbar ist, gibt es ein $i \in \{1, \ldots, m\}$ für welches $u_1 \equiv v_1 \wedge \cdots \wedge u_n \equiv v_n \wedge \neg s_i \equiv t_i$ ebenfalls unerfüllbar ist.

b) Wenden Sie Ihr Verfahren an, um die Allgemeingültigkeit von der oben angegebenen FO-Formel φ nachzuweisen.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Gegeben sei das Termgleichungssystem $\mathcal{E}$, das aus folgenden Grundidentitäten besteht:

$$\begin{array}{rcl} \mathsf{d} & \equiv & \mathsf{c} \\ \mathsf{a} & \equiv & \mathsf{f}(\mathsf{b}) \\ \mathsf{c} & \equiv & \mathsf{g}(\mathsf{d}) \end{array} \quad \begin{array}{rcl} \mathsf{f}(\mathsf{b}) & \equiv & \mathsf{g}(\mathsf{a}) \\ \mathsf{g}(\mathsf{b}) & \equiv & \mathsf{f}(\mathsf{d}) \end{array}$$

Entscheiden Sie $\mathsf{g}(\mathsf{c}) \equiv_{\mathcal{E}} \mathsf{f}(\mathsf{f}(\mathsf{a}))$ mittels des Algorithmus `KONGRUENZABSCHLUSS`. Geben Sie die Menge S sowie als Zwischenergebnisse die Mengen L in jedem Durchlauf von Schritt 4 an.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Gegeben sei das Termgleichungssystem $\mathcal{E}$ und das Termersetzungssystem $\mathcal{R}$. Zeigen Sie, dass $\mathcal{R}$ zu $\mathcal{E}$ äquivalent ist.

$$\mathcal{E} = \{ \begin{array}{rcl} \mathsf{g}(\mathsf{g}(\mathsf{g}(x))) & \equiv & \mathsf{g}(\mathsf{g}(x)), \\ \mathsf{f}(x) & \equiv & \mathsf{g}(\mathsf{g}(x)), \\ x & \equiv & \mathsf{f}(\mathsf{f}(x)) \quad \} \end{array} \qquad \mathcal{R} = \{ \begin{array}{rcl} \mathsf{f}(\mathsf{f}(\mathsf{f}(\mathsf{f}(\mathsf{f}(x))))) & \to & x, \\ \mathsf{f}(\mathsf{f}(\mathsf{f}(x))) & \to & x, \\ \mathsf{g}(x) & \to & x \quad \} \end{array}$$

*und beweisen Sie es für die Zusatzpunkte