Prof. Dr. Jürgen Giesl
Peter Schneider-Kamp, Stephan Swiderski, René Thiemann

Übungen *Termersetzungssysteme* – Blatt 9

Abgabe am Dienstag, dem 9.1.2006, zu Beginn der Übung.

Aufgabe 1 (3+9 Punkte)

a) Beweisen Sie die Irreflexivität von $\succ_{rpo}$.

b) Beweisen Sie - wenn möglich - für jedes der folgenden TESe über der Variablenmenge $\mathcal{V} = \{x, y, z\}$ die Terminierung. Nutzen Sie, wenn möglich, die RPO, sonst die RPOS. Zeigen Sie für die TESe, bei denen der Terminierungsbeweis mit RPOS scheitert, dass die Terminierung mit keiner Simplifikationsordnung bewiesen werden kann.

$$\mathcal{R}_1: \begin{array}{rcl} \mathsf{minus}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \mathsf{minus}(x, y) \\ \mathsf{double}(\mathsf{s}(x)) & \to & \mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{double}(x))) \\ \mathsf{plus}(\mathsf{s}(x), y) & \to & \mathsf{s}(\mathsf{plus}(\mathsf{minus}(x, y), \mathsf{double}(y))) \end{array}$$

$$\mathcal{R}_2: \begin{array}{rcl} \mathsf{plus}(\mathsf{plus}(x, y), z) & \to & \mathsf{plus}(x, \mathsf{plus}(y, z)) \\ \mathsf{times}(x, \mathsf{s}(y)) & \to & \mathsf{plus}(x, \mathsf{times}(y, x)) \end{array}$$

$$\mathcal{R}_3: \begin{array}{rcl} \mathsf{gcd}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \mathsf{if}(\mathsf{le}(y, x), \mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \\ \mathsf{if}(\mathsf{true}, \mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \mathsf{gcd}(\mathsf{minus}(x, y), \mathsf{s}(y)) \\ \mathsf{if}(\mathsf{false}, \mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \mathsf{gcd}(\mathsf{minus}(y, x), \mathsf{s}(x)) \end{array}$$

$$\mathcal{R}_4: \mathsf{times}(x, \mathsf{times}(\mathsf{minus}(y), y)) \to \mathsf{times}(\mathsf{minus}(\mathsf{times}(y, y)), x)$$

$$\mathcal{R}_5: \begin{array}{rcl} \mathsf{f}(\mathsf{s}(x), x) & \to & \mathsf{f}(x, \mathsf{g}(x)) \\ \mathsf{f}(x, \mathsf{h}(x)) & \to & \mathsf{f}(\mathsf{s}(x), x) \end{array}$$

Aufgabe 2 (3+10*+2 Punkte)

Eine weitere nützliche Klasse von Reduktionsordnungen für den automatischen Terminierungsbeweis ist die Klasse der Polynomordnungen. Eine Polynomordnung basiert auf einer Polynominterpretation $\mathcal{P}$, die jedem n-stelligen Funktionssymbol f ein lineares Polynom $f_{\mathcal{P}}$ über n Variablen zuordnet. Betrachten wir die erste Regel des TES aus Aufgabe 1a), dann können wir z.B. $\mathsf{minus}_{\mathcal{P}}(x_1, x_2) = x_1 + x_2 + 1$ und $\mathsf{s}_{\mathcal{P}}(x_1) = x_1 + 1$ wählen. Jede Interpretation $\mathcal{P}$ läßt sich leicht auf Terme erweitern:

- $\mathcal{P}(x) = x$ für jede Variable x.
- $\mathcal{P}(f(t_1, \ldots, t_n)) = f_{\mathcal{P}}(\mathcal{P}(t_1), \ldots, \mathcal{P}(t_n))$

Die zu $\mathcal{P}$ gehörige Polynomordnung $\succ_{\mathcal{P}}$ ist dann definiert als

$s \succ_{\mathcal{P}} t$ gdw. $\mathcal{P}(s) > \mathcal{P}(t)$ für alle Belegungen der Variablen mit natürlichen Zahlen gilt. Hierbei bezeichnet $>$ die normale $>$-Relation auf $\mathbb{N}$.

Im Beispiel gilt $\mathcal{P}(\mathsf{minus}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y))) = \mathcal{P}(\mathsf{s}(x)) + \mathcal{P}(\mathsf{s}(y)) + 1 = \mathcal{P}(x) + 1 + \mathcal{P}(y) + 1 + 1 = x + y + 3$ und analog $\mathcal{P}(\mathsf{minus}(x, y)) = x + y + 1$. Da für alle $x, y \in \mathbb{N}$ offensichtlich $x + y + 3 > x + y + 1$ gilt, haben wir $\mathsf{minus}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \succ_{\mathcal{P}} \mathsf{minus}(x, y)$ gezeigt.

Das ausmultiplizierte Polynom für ein n-stelliges Funktionssymbol f hat also die Form $\alpha_f = c_0 + c_1 x_1 + \ldots + c_n x_n$, wobei die Koeffizienten $c_0, \ldots, c_n$ wie folgt eingeschränkt werden müssen, um Fundiertheit und Monotonie von $\succ_{\mathcal{P}}$ zu garantieren:

- Alle Koeffizienten c_i sind natürliche Zahlen, d.h., $c_i \geq 0$ für alle $0 \leq i \leq n$.
- Für jede Variable x_i ist der Koeffizient größer 0, d.h., $c_i \geq 1$ für alle $1 \leq i \leq n$.

a) Beweisen Sie die Terminierung des folgenden TES mit einer Polynomordnung.

$$\begin{array}{lrcl} \mathcal{R}_1: & \mathsf{rev}(\mathsf{rev}(x)) & \to & x \\ & \mathsf{rev}(x) & \to & \mathsf{r}(x, \mathsf{nil}) \\ & \mathsf{r}(\mathsf{nil}, y) & \to & y \\ & \mathsf{r}(\mathsf{cons}(x, z), y) & \to & \mathsf{r}(z, \mathsf{cons}(x, y)) \end{array}$$

Hinweis: Für $\mathcal{R}_1$ benötigen sie lediglich Koeffizienten c_i aus $\{0, 1, 2\}$.

*Zusatzpunkte zum Weihnachtsfest!

b) Beweisen Sie die Terminierung der folgenden TESe mit Polynomordnungen.

$$\mathcal{R}_2: \quad \begin{aligned} \mathsf{f}(\mathsf{0}) &\to \mathsf{s}(\mathsf{0}) \\ \mathsf{f}(\mathsf{s}(\mathsf{0})) &\to \mathsf{s}(\mathsf{0}) \\ \mathsf{f}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(x))) &\to \mathsf{f}(\mathsf{f}(\mathsf{s}(x))) \end{aligned} \qquad \mathcal{R}_3: \quad \begin{aligned} \mathsf{f}(\mathsf{0},\mathsf{0}) &\to \mathsf{0} \\ \mathsf{f}(\mathsf{s}(x),y) &\to \mathsf{f}(x,\mathsf{s}(x)) \\ \mathsf{f}(x,\mathsf{s}(y)) &\to \mathsf{f}(y,x) \end{aligned}$$

Hinweis: Für $\mathcal{R}_2$ benötigen sie lediglich Koeffizienten c_i aus $\{0,1,2,3\}$, für $\mathcal{R}_3$ reichen sogar Koeffizienten c_i aus $\{0,1,2\}$.

c) Zeigen Sie, dass die Terminierung von $\mathcal{R}_2$ und $\mathcal{R}_3$ nicht mit RPOS nachgewiesen werden kann.

Aufgabe 3 **(6+2 Punkte)**

a) Entscheiden Sie mit dem Algorithmus UNIFY, ob die folgenden Termpaare unifizierbar sind.

(i) $\mathsf{f}(x,\mathsf{g}(x),\mathsf{h}(\mathsf{a})) =^? \mathsf{f}(\mathsf{h}(z),\mathsf{g}(y),y)$

(ii) $\mathsf{f}(y,z,\mathsf{g}(z),y) =^? \mathsf{f}(\mathsf{h}(x),\mathsf{g}(u),x,\mathsf{g}(x))$

(iii) $\mathsf{c}(\mathsf{f}(\mathsf{g}(x),\mathsf{h}(z),y,z),\mathsf{f}(y,x,\mathsf{g}(\mathsf{h}(z)),\mathsf{h}(y))) =^? \mathsf{c}(u,u)$

(iv) $\mathsf{f}(\mathsf{g}(x_1,x_1),x_2,x_3) =^? \mathsf{f}(x_4,\mathsf{g}(x_3,x_3),\mathsf{g}(x_4,x_4))$

b) Eine Substitution σ heiße *idempotent*, falls $\sigma = \sigma\sigma$. Zeigen Sie, dass für alle Unifikationsprobleme S gilt: Falls S lösbar ist, so hat S auch einen allgemeinsten Unifikator, der idempotent ist.