Aufgabe 1

a) Da $\mathcal{R}$ konvergent ist, brauchen wir nur $\mathsf{app}(y, \mathsf{nil})$ und y zu Normalformen auszuwerten und auf Gleichheit zu testen. Da die beiden Terme bereits in Normalform sind, gilt $\mathcal{E} \not\models \mathsf{app}(y, \mathsf{nil}) \equiv y$.

b) Wir nutzen das Verfahren der impliziten Induktion mit der LPO mit $\mathsf{app} \sqsupset \mathsf{cons}$, um $\mathcal{E} \models_I \mathsf{app}(y, \mathsf{nil}) \equiv y$ zu beweisen.

$$
\begin{array}{crclrcl}
 & \mathsf{app}(y,\mathsf{nil}) & \equiv & y & \mathsf{app}(\mathsf{nil}, z) & \to & z \\
 & & & & \mathsf{app}(\mathsf{cons}(x,y), z) & \to & \mathsf{cons}(x, \mathsf{app}(y,z)) \\
\hline
 & & & & \mathsf{app}(\mathsf{nil}, z) & \to & z \\
\Rightarrow_{Or} & & & & \mathsf{app}(\mathsf{cons}(x,y), z) & \to & \mathsf{cons}(x, \mathsf{app}(y,z)) \\
 & & & & \mathsf{app}(y, \mathsf{nil}) & \to & y \\
\hline
 & \mathsf{nil} & \equiv & \mathsf{nil} & \mathsf{app}(\mathsf{nil}, z) & \to & z \\
\Rightarrow_G^2 & \mathsf{cons}(x,y) & \equiv & \mathsf{cons}(x, \mathsf{app}(y, \mathsf{nil})) & \mathsf{app}(\mathsf{cons}(x,y), z) & \to & \mathsf{cons}(x, \mathsf{app}(y,z)) \\
 & & & & \mathsf{app}(y, \mathsf{nil}) & \to & y \\
\hline
 & \mathsf{nil} & \equiv & \mathsf{nil} & \mathsf{app}(\mathsf{nil}, z) & \to & z \\
\Rightarrow_{RG} & \mathsf{cons}(x,y) & \equiv & \mathsf{cons}(x,y) & \mathsf{app}(\mathsf{cons}(x,y), z) & \to & \mathsf{cons}(x, \mathsf{app}(y,z)) \\
 & & & & \mathsf{app}(y, \mathsf{nil}) & \to & y \\
\hline
 & & & & \mathsf{app}(\mathsf{nil}, z) & \to & z \\
\Rightarrow_L^2 & & & & \mathsf{app}(\mathsf{cons}(x,y), z) & \to & \mathsf{cons}(x, \mathsf{app}(y,z)) \\
 & & & & \mathsf{app}(y, \mathsf{nil}) & \to & y
\end{array}
$$

Wir haben nun alle kritischen Paare gebildet und erhalten ein konvergentes TES. Damit haben wir $\mathcal{E} \models_I \mathsf{app}(y, \mathsf{nil}) \equiv y$ bewiesen.

Aufgabe 2

a) Angenommen, die Aussage gilt nicht. Dann gibt es einen Term t mit unendlich vielen Normalformen. Wir konstruieren den folgenden Baum B.

   - t ist die Wurzel.
   - Jeder Knoten r hat die Kinder $\{s \mid r \to_{\mathcal{R}} s\}$.

   Da $\mathcal{R}$ terminiert, erhalten wir keine Zyklen in B, die Definition ergibt also wirklich einen Baum. Da wegen der Endlichkeit von $\mathcal{R}$ auf jeden Term nur endlich viele Regeln angewendet werden können, ist der Verzweigungsgrad von B endlich. Da t unendlich viele Normalformen hat, ist B unendlich. Dann gibt es mit Königs Lemma einen unendlichen Pfad im Baum im Widerspruch zur Terminierung.

   Die Aussage lässt sich auch für jeden Term zeigen, wobei man Induktion über $\to_{\mathcal{R}}$ nutzt. Falls t Normalform ist, gilt die Aussage sofort. Ansonsten hat t die $\to_{\mathcal{R}}$-Nachfolger $s_1, \ldots, s_n$ (Da $\mathcal{R}$ endlich ist, gibt es nur endlich viele Nachfolger), wobei induktiv jeder Term s_i nur endliche viele Normalformen hat. Offensichtlich sind die Normalformen von t genau die Normalformen aller s_i, also auch nur endlich viele.

b) Für das endliche TES $\mathcal{R}_1 = \{\mathsf{a} \to \mathsf{f}(\mathsf{a}), \mathsf{a} \to \mathsf{b}\}$ und auch für das terminierende TES $\mathcal{R}_2 = \{\mathsf{a} \to \mathsf{f}^i(\mathsf{b}) \mid i \in \mathbb{N}\}$ hat der Term a die unendliche Menge von Normalformen $\{\mathsf{f}^i(\mathsf{b}) \mid i \in \mathbb{N}\}$.

Aufgabe 3

$\mathsf{log} \sqsupset \mathsf{s} \sqsupset \mathsf{half}$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{x \succeq_{lpo} x}}{\mathsf{s}(x) \succ_{lpo} x}\ 1}{\mathsf{s}(x) \succ_{lpo} \mathsf{half}(x)}\ 2(\mathsf{s} \sqsupset \mathsf{half})}{\mathsf{s}(\mathsf{s}(x)) \succ_{lpo} \mathsf{s}(\mathsf{half}(x))}\ 3}{\mathsf{log}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(x))) \succ_{lpo} \mathsf{log}(\mathsf{s}(\mathsf{half}(x)))}\ 3}{\mathsf{log}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(x))) \succ_{lpo} \mathsf{s}(\mathsf{log}(\mathsf{s}(\mathsf{half}(x))))}\ 2(\mathsf{log} \sqsupset \mathsf{s})$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{x \succeq_{lpo} x}}{\mathsf{s}(x) \succ_{lpo} x}\ 1}{\mathsf{s}(x) \succ_{lpo} \mathsf{half}(x)}\ 2(\mathsf{s} \sqsupset \mathsf{half})}{\mathsf{s}(\mathsf{s}(x)) \succ_{lpo} \mathsf{s}(\mathsf{half}(x))}\ 3}{\mathsf{half}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(x))) \succ_{lpo} \mathsf{s}(\mathsf{half}(x))}\ 1$$

Aufgabe 4

a) Man zeigt für $\mathcal{E} = \{\mathsf{a} \equiv \mathsf{b}, \mathsf{c} \equiv \mathsf{f}(\mathsf{d}), \mathsf{b} \equiv \mathsf{d}, \mathsf{g}(\mathsf{a}) \equiv \mathsf{c}\}$

$$\mathcal{E} \models \mathsf{f}(\mathsf{a}) \equiv \mathsf{g}(\mathsf{a})$$

In der Kongruenzabschluss-Methode ergibt sich

$$S = \{\mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{c}, \mathsf{d}, \mathsf{f}(\mathsf{a}), \mathsf{f}(\mathsf{d}), \mathsf{g}(\mathsf{a})\}$$

Nun erhält man nach und nach die Mengen

- $\{\{\mathsf{a}, \mathsf{b}\}, \{\mathsf{c}, \mathsf{f}(\mathsf{d})\}, \{\mathsf{b}, \mathsf{d}\}, \{\mathsf{c}, \mathsf{g}(\mathsf{a})\}, \{\mathsf{f}(\mathsf{a})\}\}$
- $\{\{\mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{d}\}, \{\mathsf{c}, \mathsf{f}(\mathsf{d}), \mathsf{g}(\mathsf{a})\}, \{\mathsf{f}(\mathsf{a})\}\}$
- $\{\{\mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{d}\}, \{\mathsf{c}, \mathsf{f}(\mathsf{d}), \mathsf{g}(\mathsf{a})\}, \{\mathsf{f}(\mathsf{a}), \mathsf{f}(\mathsf{d})\}\}$
- $\{\{\mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{d}\}, \{\mathsf{c}, \mathsf{f}(\mathsf{a}), \mathsf{f}(\mathsf{d}), \mathsf{g}(\mathsf{a})\}\}$

Da $\mathsf{f}(\mathsf{a})$ und $\mathsf{g}(\mathsf{a})$ in derselben Menge sind, gilt $\mathcal{E} \models \mathsf{f}(\mathsf{a}) \equiv \mathsf{g}(\mathsf{a})$.

b) Wir stellen für jeden der beiden Fälle, je nachdem, wie verzweigt worden ist, eine Bedingung auf.

- Im Falle `b == d` müssen wir die gleiche Aussage wie in Teil a) zeigen.
- Analog stellt man im anderen Fall die Bedingung

  $$\mathcal{E}' \models \mathsf{f}(\mathsf{a}) \equiv \mathsf{g}(\mathsf{a})$$

  für $\mathcal{E}' = \{\mathsf{a} \equiv \mathsf{b}, \mathsf{c} \equiv \mathsf{f}(\mathsf{d}), \mathsf{g}(\mathsf{b}) \equiv \mathsf{f}(\mathsf{a})\}$ auf.

In beiden Fällen ergeben sich Grundgleichungssysteme, so dass wir den Kongruenzabschluss als Entscheidungsverfahren nutzen können.

Aufgabe 5

Offensichtlich folgt aus der Kommutation die lokale Kommutation. Für die andere Richtung führen wir Induktion über $\rightarrow_1 \cup \rightarrow_2$. Sei nun $t_1 \leftarrow_1^n s \rightarrow_2^m t_2$. Für $n = 0$ oder $m = 0$ ist die Zusammenführbarkeit offensichtlich. Ansonsten gilt

$$
\begin{tikzcd}
 & & s \arrow[dl, "1"] \arrow[dr, "2"'] & & \\
 & u_1 \arrow[dl, "*"', "1"] \arrow[dr, dashed, "*", "2"'] \arrow[rr, phantom, "l.K."] & & u_2 \arrow[dl, dashed, "*"', "1"] \arrow[dr, "*", "2"'] & \\
t_1 \arrow[dr, dashed, "*", "2"'] \arrow[rr, phantom, "Ind."] & & r \arrow[dl, dashed, "*"', "1"] \arrow[dr, phantom, "Ind."] & & t_2 \arrow[ddll, dashed, "*"', "1"] \\
 & r' \arrow[dr, dashed, "*", "2"'] & & & \\
 & & s' & &
\end{tikzcd}
$$

Aufgabe 6

Stimmt	Stimmt nicht
	X
X	
	X
X	
	X
X	

- Lokale Konfluenz von $\to_{\mathcal{R}}$ ist entscheidbar, falls $\mathcal{R}$ terminiert, im Allgemeinen jedoch nicht. Um dies zu zeigen, reduzieren wir das Halteproblem von Turingmaschinen auf dem leeren Wort auf die Frage nach lokaler Konfluenz von einem Termersetzungssystem.

  Sei T eine deterministische Turingmaschine über dem Alphabet $\{\llcorner\!\lrcorner\} \cup \Sigma$, der Zustandsmenge Q mit ausgezeichnetem Startzustand q_0 und Endzustand q_s, deren Band zu beiden Seiten unbegrenzt ist. Dazu geben wir ein TES $\mathcal{R}$ über $Q \cup \{\llcorner\!\lrcorner\} \cup \Sigma \cup \{., \varepsilon, \mathsf{start}, \mathsf{stop}\}$ an, das die Arbeitsweise von T simuliert. Hierzu wird die Turingmaschinen-Konfiguration $\ldots \llcorner\!\lrcorner\llcorner\!\lrcorner \mathsf{a}_n \ldots \mathsf{a}_1 q \mathsf{b}_1 \ldots \mathsf{b}_m \llcorner\!\lrcorner\llcorner\!\lrcorner \ldots$ mit dem Term $q(\mathsf{a}_1.\mathsf{a}_2.\ldots.\mathsf{a}_n.\varepsilon, \mathsf{b}_1.\mathsf{b}_2.\ldots.\mathsf{b}_m.\varepsilon)$ repräsentiert, also einem Term mit dem binären Zustandssymbol q mit zwei Listen als Argumenten, welche die Symbole links und rechts von der Kopfposition enthalten.

  Zuerst fügen wir für jeden Zustand außer q_s drei Regeln in $\mathcal{R}$ ein, die dafür sorgen, dass nie ein leeres Band erreicht wird, indem sie die nötigen Blanks erzeugen.

$$\begin{array}{rcl} q(\varepsilon, \varepsilon) & \to & q(\llcorner\!\lrcorner.\varepsilon, \llcorner\!\lrcorner.\varepsilon) \\ q(x.y, \varepsilon) & \to & q(x.y, \llcorner\!\lrcorner.\varepsilon) \\ q(\varepsilon, x.z) & \to & q(\llcorner\!\lrcorner.\varepsilon, x.z) \end{array}$$

  Nun nehmen wir für jede Regel q a q' b $\{N/L/R\}$ von T je nach Richtung eine der folgenden Regeln in $\mathcal{R}$ auf:

$$\begin{array}{rcl} q(x.y, \mathsf{a}.z) & \to & q'(x.y, \mathsf{b}.z)\ (N) \\ q(x.y, \mathsf{a}.z) & \to & q'(y, x.\mathsf{b}.z)\ (L) \\ q(x.y, \mathsf{a}.z) & \to & q'(\mathsf{b}.x.y, z)\ (R) \end{array}$$

In dieser Weise kann offensichtlich T in $\mathcal{R}$ simuliert werden. Da T deterministisch ist, gibt es keine kritischen Paare in $\mathcal{R}$, bislang ist $\mathcal{R}$ also lokal konfluent.

Zum Abschluss fügen wir

$$\begin{array}{rcl} q_s(x,y) & \rightarrow & \mathsf{stop} \\ \mathsf{start} & \rightarrow & q_0(\varepsilon,\varepsilon) \\ \mathsf{start} & \rightarrow & \mathsf{stop} \end{array}$$

in $\mathcal{R}$ ein, so dass genau ein kritisches Paar $\langle q_0(\varepsilon,\varepsilon), \mathsf{stop}\rangle$ entsteht. Es kann leicht verifiziert werden, dass T terminiert gdw. das obige einzige kritische Paar zusammenführbar ist gdw. $\mathcal{R}$ lokal konfluent ist.

- Jede Simplifikationsordnung $\succ$ ist fundiert und damit auch irreflexiv, denn sonst gäbe es die unendliche Folge $x \succ x \succ \ldots$.

- Grundterminierung ist äquivalent zur Terminierung: Jede unendliche Reduktion von Termen, die nicht grund sind, kann auch durchgeführt werden, wenn man alle Variablen in den Termen durch eine Konstante c ersetzt. (Stabilität von $\rightarrow_{\mathcal{R}}$).

- $\mathcal{R}$ ist konvergent $\overset{3.3.20}{\Leftrightarrow}$ $\mathcal{R}$ ist konfluent und terminiert $\overset{5.2.3}{\Leftrightarrow}$ $\mathcal{R}$ ist lokal konfluent und terminiert.

- Zu $\mathcal{E} = \{x \equiv y\}$ gibt es offensichtlich kein äquivalentes konvergentes TES, denn sonst müsste man x oder y reduzieren können im Widerspruch dazu, dass linke Seiten von Regeln keine Variablen sein dürfen.

- Nach Birkhoff ist $\equiv_{\mathcal{E}} = \leftrightarrow^*_{\mathcal{E}}$ und $\leftrightarrow^*_{\mathcal{E}}$ ist semi-entscheidbar.

Aufgabe 7

$$
\begin{array}{rrcl}
\mathcal{R}_0 = & \mathsf{f}(\mathsf{e}, x) & \to & x \\
& \mathsf{f}(\mathsf{i}(x), x) & \to & \mathsf{e} \\
& \mathsf{i}(\mathsf{i}(x)) & \to & x \\
CP(\mathcal{R}_0) = & \langle \mathsf{e} & , & \mathsf{f}(x, \mathsf{i}(x)) \rangle \\
& \langle \mathsf{i}(x) & , & \mathsf{i}(x) \rangle \\
\mathcal{R}_1 = \mathcal{R}_0 \cup & \mathsf{f}(x, \mathsf{i}(x)) & \to & \mathsf{e} \\
CP(\mathcal{R}_1) = CP(\mathcal{R}_0) \cup & \langle \mathsf{e} & , & \mathsf{f}(\mathsf{i}(x), x) \rangle \\
& \langle \mathsf{e} & , & \mathsf{i}(\mathsf{e}) \rangle \\
\mathcal{R}_2 = \mathcal{R}_1 \cup & \mathsf{i}(\mathsf{e}) & \to & \mathsf{e} \\
CP(\mathcal{R}_2) = CP(\mathcal{R}_1) \cup & \langle \mathsf{e} & , & \mathsf{f}(\mathsf{e}, \mathsf{e}) \rangle \\
& \langle \mathsf{e} & , & \mathsf{f}(\mathsf{e}, \mathsf{e}) \rangle \\
& \langle \mathsf{e} & , & \mathsf{i}(\mathsf{e}) \rangle \\
\mathcal{R}_3 = \mathcal{R}_2 & & &
\end{array}
$$

Es ergibt sich das konvergente TES

$$\mathcal{R}_2 = \{\mathsf{f}(\mathsf{e}, x) \to x, \mathsf{f}(\mathsf{i}(x), x) \to \mathsf{e}, \mathsf{i}(\mathsf{i}(x)) \to x, \mathsf{f}(x, \mathsf{i}(x)) \to \mathsf{e}, \mathsf{i}(\mathsf{e}) \to \mathsf{e}\}.$$