Term Rewriting Systems SS 11
Solution - Exercise Sheet 10

Prof. Dr. Jürgen Giesl
Marc Brockschmidt, Carsten Fuhs, Thomas Ströder

Exercise 1 (Implizite Induktion): (3 + 3 = 6 points)

Das folgende konvergente TES $\mathcal{R}$ über der Signatur $\Sigma = \{\mathsf{a}, \mathsf{nil}, \mathsf{cons}\}$ definiert die Konkatenation von Listen.

$$\begin{array}{rcl} \mathsf{a}(\mathsf{nil}, z) & \to & z \\ \mathsf{a}(\mathsf{cons}(x, y), z) & \to & \mathsf{cons}(x, \mathsf{a}(y, z)) \end{array}$$

Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen für das entsprechende Termgleichungssystem $\mathcal{E}$ (in dem $\to$ durch $\equiv$ ersetzt wurde).

1. $\mathcal{E} \models_I \mathsf{a}(\mathsf{a}(x, y), z) \equiv \mathsf{a}(x, \mathsf{a}(y, z))$
2. $\mathcal{E} \models_I \mathsf{a}(x, x) \equiv x$

Solution:

Wir wählen in Teil a) und b) eine LPO mit $\mathsf{a} \sqsupset \mathsf{cons}$.

1.

	$\mathsf{a}(\mathsf{a}(x, y), z)$	$\equiv$	$\mathsf{a}(x, \mathsf{a}(y, z))$	$\mathsf{a}(\mathsf{nil}, z)$	$\to$	z
				$\mathsf{a}(\mathsf{cons}(x, y), z)$	$\to$	$\mathsf{cons}(x, \mathsf{a}(y, z))$
$\vdash_{Or}$				$\mathsf{a}(\mathsf{nil}, z)$	$\to$	z
				$\mathsf{a}(\mathsf{cons}(x, y), z)$	$\to$	$\mathsf{cons}(x, \mathsf{a}(y, z))$
				$\mathsf{a}(\mathsf{a}(x, y), z)$	$\to$	$\mathsf{a}(x, \mathsf{a}(y, z))$
$\vdash_G^3$	$\mathsf{a}(\mathsf{a}(x, y), \mathsf{a}(z, u))$	$\equiv$	$\mathsf{a}(\mathsf{a}(x, \mathsf{a}(y, z)), u)$	$\mathsf{a}(\mathsf{nil}, z)$	$\to$	z
	$\mathsf{a}(\mathsf{nil}, \mathsf{a}(x, y))$	$\equiv$	$\mathsf{a}(x, y)$	$\mathsf{a}(\mathsf{cons}(x, y), z)$	$\to$	$\mathsf{cons}(x, \mathsf{a}(y, z))$
	$\mathsf{a}(\mathsf{cons}(x, y), \mathsf{a}(z, u))$	$\equiv$	$\mathsf{a}(\mathsf{cons}(x, \mathsf{a}(y, z)), u)$	$\mathsf{a}(\mathsf{a}(x, y), z)$	$\to$	$\mathsf{a}(x, \mathsf{a}(y, z))$
$\vdash_{RG}^*$	$\mathsf{a}(x, \mathsf{a}(y, \mathsf{a}(z, u)))$	$\equiv$	$\mathsf{a}(x, \mathsf{a}(y, \mathsf{a}(z, u)))$	$\mathsf{a}(\mathsf{nil}, z)$	$\to$	z
	$\mathsf{a}(x, y)$	$\equiv$	$\mathsf{a}(x, y)$	$\mathsf{a}(\mathsf{cons}(x, y), z)$	$\to$	$\mathsf{cons}(x, \mathsf{a}(y, z))$
	$\mathsf{cons}(x, \mathsf{a}(y, \mathsf{a}(z, u)))$	$\equiv$	$\mathsf{cons}(x, \mathsf{a}(y, \mathsf{a}(z, u)))$	$\mathsf{a}(\mathsf{a}(x, y), z)$	$\to$	$\mathsf{a}(x, \mathsf{a}(y, z))$
$\vdash_L^3$				$\mathsf{a}(\mathsf{nil}, z)$	$\to$	z
				$\mathsf{a}(\mathsf{cons}(x, y), z)$	$\to$	$\mathsf{cons}(x, \mathsf{a}(y, z))$
				$\mathsf{a}(\mathsf{a}(x, y), z)$	$\to$	$\mathsf{a}(x, \mathsf{a}(y, z))$

Alle kritischen Paare wurden gebildet, folglich ist die obige Ableitung, die in einer leeren Gleichungsmenge endet, fair. Somit haben wir $\mathcal{E} \models_I \mathsf{a}(\mathsf{a}(x, y), z) \equiv \mathsf{a}(x, \mathsf{a}(y, z))$ bewiesen.

2.

	$\mathsf{a}(x,x) \equiv x$	$\mathsf{a}(\mathsf{nil},z) \to z$ $\mathsf{a}(\mathsf{cons}(x,y),z) \to \mathsf{cons}(x,\mathsf{a}(y,z))$
$\vdash_{Or}$		$\mathsf{a}(\mathsf{nil},z) \to z$ $\mathsf{a}(\mathsf{cons}(x,y),z) \to \mathsf{cons}(x,\mathsf{a}(y,z))$ $\mathsf{a}(x,x) \to x$
$\vdash_{G}$	$\mathsf{cons}(x,\mathsf{a}(y,\mathsf{cons}(x,y))) \equiv \mathsf{cons}(x,y)$	$\mathsf{a}(\mathsf{nil},z) \to z$ $\mathsf{a}(\mathsf{cons}(x,y),z) \to \mathsf{cons}(x,\mathsf{a}(y,z))$ $\mathsf{a}(x,x) \to x$
$\vdash_{Inj}$	$\mathsf{a}(y,\mathsf{cons}(x,y)) \equiv y$ $x \equiv x$	$\mathsf{a}(\mathsf{nil},z) \to z$ $\mathsf{a}(\mathsf{cons}(x,y),z) \to \mathsf{cons}(x,\mathsf{a}(y,z))$ $\mathsf{a}(x,x) \to x$
$\vdash_{Or}$	$x \equiv x$	$\mathsf{a}(\mathsf{nil},z) \to z$ $\mathsf{a}(\mathsf{cons}(x,y),z) \to \mathsf{cons}(x,\mathsf{a}(y,z))$ $\mathsf{a}(x,x) \to x$ $\mathsf{a}(y,\mathsf{cons}(x,y)) \to y$
$\vdash_{G}$	$x \equiv x$ $\mathsf{nil} \equiv \mathsf{cons}(x,\mathsf{nil})$	$\mathsf{a}(\mathsf{nil},z) \to z$ $\mathsf{a}(\mathsf{cons}(x,y),z) \to \mathsf{cons}(x,\mathsf{a}(y,z))$ $\mathsf{a}(x,x) \to x$ $\mathsf{a}(y,\mathsf{cons}(x,y)) \to y$
$\vdash_{Ink}$	$False$	

Damit haben wir $\mathcal{E} \not\models_I \mathsf{a}(x,x) \equiv x$ bewiesen.

Exercise 2 (Implizite Induktion): ((1 + 4) + 3 = 8 points)

Gegeben sei das konvergente Termersetzungsystem $\mathcal{R}$ über der Signatur $\Sigma = \{\mathsf{flatten}, \mathsf{nil}, \mathsf{cons}\}$.

$$\begin{array}{rcl} \mathsf{flatten}(\mathsf{nil}) & \to & \mathsf{nil} \\ \mathsf{flatten}(\mathsf{cons}(\mathsf{nil},x)) & \to & \mathsf{cons}(\mathsf{nil},\mathsf{flatten}(x)) \\ \mathsf{flatten}(\mathsf{cons}(\mathsf{cons}(x,y),z)) & \to & \mathsf{flatten}(\mathsf{cons}(x,\mathsf{cons}(y,z))) \end{array}$$

Sei $\mathcal{E}$ das entsprechende Gleichungssystem (bei dem $\to$ durch $\equiv$ ersetzt wird). Wir sind nun interessiert an der Aussage, ob $\mathsf{flatten}$ idempotent ist, ob also $\mathcal{E} \models \mathsf{flatten}(x) \equiv \mathsf{flatten}(\mathsf{flatten}(x))$ gilt.

a) Beweisen oder widerlegen Sie:

1. $\mathcal{E} \models \mathsf{flatten}(x) \equiv \mathsf{flatten}(\mathsf{flatten}(x))$.
2. $\mathcal{E} \models_I \mathsf{flatten}(x) \equiv \mathsf{flatten}(\mathsf{flatten}(x))$.

b) Betrachten Sie wiederum das wie in Teil **a)** definierte Termgleichungssystem $\mathcal{E}$.

Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussage, wobei als Signatur nun jedoch $\Sigma' = \Sigma \cup \{\mathcal{O}, \mathsf{s}\}$ verwendet wird:

$$\mathcal{E} \models_I \mathsf{flatten}(x) \equiv \mathsf{flatten}(\mathsf{flatten}(x))$$

Solution:

a) 1. Da $\mathcal{R}$ konvergent und äquivalent zu $\mathcal{E}$ ist, gilt $\mathsf{flatten}(x) \equiv_{\mathcal{E}} \mathsf{flatten}(\mathsf{flatten}(x))$ genau dann, wenn $\mathsf{flatten}(x) \downarrow_{\mathcal{R}} = \mathsf{flatten}(\mathsf{flatten}(x)) \downarrow_{\mathcal{R}}$. Da beide Terme schon in Normalform sind, haben wir die Aussage $\mathsf{flatten}(x) \not\equiv_{\mathcal{E}} \mathsf{flatten}(\mathsf{flatten}(x))$ bewiesen.

2.

	$\mathcal{E}_i$	$\mathcal{R}_i \setminus \mathcal{R}$
	$\{\mathsf{f}(x) \equiv \mathsf{f}(\mathsf{f}(x))\}$	$\emptyset$
$\vdash_{OR}$	$\emptyset$	$\{\mathsf{f}(\mathsf{f}(x)) \to \mathsf{f}(x)\}$
$\vdash_{G}$	$\{\mathsf{f}(\mathsf{n}) \equiv \mathsf{f}(\mathsf{n})\}$	$\{\mathsf{f}(\mathsf{f}(x)) \to \mathsf{f}(x)\}$
$\vdash_{L}$	$\emptyset$	$\{\mathsf{f}(\mathsf{f}(x)) \to \mathsf{f}(x)\}$
$\vdash_{G}$	$\{\mathsf{f}(\mathsf{c}(\mathsf{n}, x)) \equiv \mathsf{f}(\mathsf{c}(\mathsf{n}, \mathsf{f}(x)))\}$	$\{\mathsf{f}(\mathsf{f}(x)) \to \mathsf{f}(x)\}$
$\vdash_{RG}$	$\{\mathsf{c}(\mathsf{n}, \mathsf{f}(x)) \equiv \mathsf{f}(\mathsf{c}(\mathsf{n}, \mathsf{f}(x)))\}$	$\{\mathsf{f}(\mathsf{f}(x)) \to \mathsf{f}(x)\}$
$\vdash_{RG}$	$\{\mathsf{c}(\mathsf{n}, \mathsf{f}(x)) \equiv \mathsf{c}(\mathsf{n}, \mathsf{f}(\mathsf{f}(x)))\}$	$\{\mathsf{f}(\mathsf{f}(x)) \to \mathsf{f}(x)\}$
$\vdash_{RG}$	$\{\mathsf{c}(\mathsf{n}, \mathsf{f}(x)) \equiv \mathsf{c}(\mathsf{n}, \mathsf{f}(x))\}$	$\{\mathsf{f}(\mathsf{f}(x)) \to \mathsf{f}(x)\}$
$\vdash_{L}$	$\emptyset$	$\{\mathsf{f}(\mathsf{f}(x)) \to \mathsf{f}(x)\}$
$\vdash_{G}$	$\{\mathsf{f}(\mathsf{c}(\mathsf{c}(x, y), z)) \equiv \mathsf{f}(\mathsf{f}(\mathsf{c}(x, \mathsf{c}(y, z))))\}$	$\{\mathsf{f}(\mathsf{f}(x)) \to \mathsf{f}(x)\}$
$\vdash_{RG}$	$\{\mathsf{f}(\mathsf{c}(x, \mathsf{c}(y, z))) \equiv \mathsf{f}(\mathsf{f}(\mathsf{c}(x, \mathsf{c}(y, z))))\}$	$\{\mathsf{f}(\mathsf{f}(x)) \to \mathsf{f}(x)\}$
$\vdash_{RG}$	$\{\mathsf{f}(\mathsf{c}(x, \mathsf{c}(y, z))) \equiv \mathsf{f}(\mathsf{c}(x, \mathsf{c}(y, z)))\}$	$\{\mathsf{f}(\mathsf{f}(x)) \to \mathsf{f}(x)\}$
$\vdash_{L}$	$\emptyset$	$\{\mathsf{f}(\mathsf{f}(x)) \to \mathsf{f}(x)\}$
$\vdash_{G}$	$\{\mathsf{f}(\mathsf{f}(x)) \equiv \mathsf{f}(\mathsf{f}(x))\}$	$\{\mathsf{f}(\mathsf{f}(x)) \to \mathsf{f}(x)\}$
$\vdash_{L}$	$\emptyset$	$\{\mathsf{f}(\mathsf{f}(x)) \to \mathsf{f}(x)\}$

b) Das TES $\mathcal{R}$ ist konvergent und zu $\mathcal{E}$ äquivalent, jedoch gilt für die Grundinstanz

$$\mathsf{flatten}(\mathcal{O}) \equiv \mathsf{flatten}(\mathsf{flatten}(\mathcal{O}))$$

der betrachteten Termgleichung:

$$\mathsf{flatten}(\mathcal{O}) \downarrow_{\mathcal{R}} = \mathsf{flatten}(\mathcal{O}) \neq \mathsf{flatten}(\mathsf{flatten}(\mathcal{O})) = \mathsf{flatten}(\mathsf{flatten}(\mathcal{O})) \downarrow_{\mathcal{R}}$$

Damit gilt also nicht $\mathcal{E} \models \mathsf{flatten}(\mathcal{O}) \equiv \mathsf{flatten}(\mathsf{flatten}(\mathcal{O}))$, so dass nach Def. 6.3.2 auch $\mathcal{E} \models_I \mathsf{flatten}(x) \equiv \mathsf{flatten}(\mathsf{flatten}(x))$ nicht gilt.