Prof. Dr. Jürgen Giesl
Marc Brockschmidt, Carsten Fuhs, Thomas Ströder

Exercise 1 (Konfluenz): (1,5 + 1,5 + 1,5 + 1,5 + 1,5 + 2,5 = 10 points)

Berechnen Sie für die folgenden Termersetzungssysteme die kritischen Paare und überprüfen Sie, welche davon zusammenführbar sind. Welche der Termersetzungssysteme sind lokal konfluent, welche sind konfluent? Welches Kriterium haben Sie jeweils zum Nachweis der Konfluenz genutzt?

a) $\mathcal{R}_1 = \{\ \mathsf{f}(\mathsf{f}(x)) \to \mathsf{g}(x)\ \}$

b) $\mathcal{R}_2 = \left\{ \begin{array}{rcl} \mathsf{f}(x,\mathsf{f}(y,z)) & \to & \mathsf{f}(\mathsf{f}(x,y),z) \\ \mathsf{f}(\mathsf{e},x) & \to & x \end{array} \right\}$

c) $\mathcal{R}_3 = \left\{ \begin{array}{rcl} \mathsf{f}(x,\mathsf{f}(y,z)) & \to & \mathsf{f}(\mathsf{f}(x,y),z) \\ \mathsf{f}(x,\mathsf{e}) & \to & x \end{array} \right\}$

d) $\mathcal{R}_4 = \left\{ \begin{array}{rcll} \mathsf{gt}(x,\mathsf{s}^i(x)) & \to & \mathsf{false} & \mid i \in \mathbb{N} \\ \mathsf{gt}(\mathsf{s}^i(x),x) & \to & \mathsf{true} & \mid i \in \mathbb{N}, i > 0 \end{array} \right\}$

e) $\mathcal{R}_5 = \left\{ \begin{array}{rcl} \mathsf{minus}(x,0) & \to & x \\ \mathsf{minus}(\mathsf{s}(x),\mathsf{s}(y)) & \to & \mathsf{minus}(x,y) \\ \mathsf{div}(0,y) & \to & 0 \\ \mathsf{div}(\mathsf{s}(x),y) & \to & \mathsf{s}(\mathsf{div}(\mathsf{minus}(\mathsf{s}(x),y),y)) \end{array} \right\}$

f) $\mathcal{R}_6 = \mathcal{R}_4 \cup \mathcal{R}_5$

Solution:

a) Auch wenn man nur eine Regel hat, erhält man nach Umbenennen der Variablen eine Überlappung:

$$\mathsf{f}(\mathsf{f}(x)) \to \mathsf{g}(x)$$
$$\mathsf{f}(\underline{\mathsf{f}(y)}) \to \mathsf{g}(y)$$

Der Unifikator ist $\sigma = \{y/\mathsf{f}(x)\}$. Auf die untere Regel angewendet erhält man den Term $\mathsf{f}(\mathsf{f}(\mathsf{f}(x)))$ welcher mit der ersten Regel zu $\mathsf{g}(\mathsf{f}(x))$ und mit der zweiten zu $\mathsf{f}(\mathsf{g}(x))$ auswertet. Dies ist also unser kritisches Paar, welches offensichtlich *nicht* zusammenführbar ist, da beide Terme in Normalform sind. Daher ist $\mathcal{R}_1$ *nicht* konfluent.

b) Hier gibt es drei kritische Paare. Zunächst betrachten wir folgende Überlappung:

$$\mathsf{f}(x,\mathsf{f}(y,z)) \to \mathsf{f}(\mathsf{f}(x,y),z) \qquad \sigma = \{y'/x, z'/\mathsf{f}(y,z)\}$$
$$\mathsf{f}(x',\underline{\mathsf{f}(y',z')}) \to \mathsf{f}(\mathsf{f}(x',y'),z')$$

Das führt zu dem Term $\mathsf{f}(x',\mathsf{f}(x,\mathsf{f}(y,z)))$, welcher mit erster und zweiter Regel zum kritischen Paar

$$\langle \mathsf{f}(x',\mathsf{f}(\mathsf{f}(x,y),z)), \mathsf{f}(\mathsf{f}(x',x),\mathsf{f}(y,z)) \rangle$$

führt. Dieses Paar lässt sich aber wieder zusammenführen:

$$\mathsf{f}(x',\mathsf{f}(\mathsf{f}(x,y),z)) \to \mathsf{f}(\mathsf{f}(x',\mathsf{f}(x,y)),z) \to \mathsf{f}(\mathsf{f}(\mathsf{f}(x',x),y),z)$$
$$\mathsf{f}(\mathsf{f}(x',x),\mathsf{f}(y,z)) \to \mathsf{f}(\mathsf{f}(\mathsf{f}(x',x),y),z)$$

Als nächstes betrachten wir die Überlappung zwischen erster und zweiter Regel:

$$\begin{aligned} \mathsf{f}(x, \underline{\mathsf{f}(y, z)}) &\to \mathsf{f}(\mathsf{f}(x, y), z) \quad \sigma = \{y/\mathsf{e}, z/x'\} \\ \mathsf{f}(\mathsf{e}, x') &\to x' \end{aligned}$$

Das führt zum Term $\mathsf{f}(x, \mathsf{f}(\mathsf{e}, x'))$, der zu dem kritischen Paar $\langle \mathsf{f}(\mathsf{f}(x, \mathsf{e}), x'), \mathsf{f}(x, x')\rangle$ führt. Beide Terme sind in Normalform bzgl. $\to$, so dass das Paar nicht zusammenführbar ist. Damit ist $\mathcal{R}_2$ nicht lokal konfluent und damit auch nicht konfluent. Wir haben allerdings noch ein drittes kritisches Paar, welches aus der Unifikation der ersten und zweiten Regel an der Root-Position entsteht mit $\sigma = \{x/\mathsf{e}, x'/\mathsf{f}(y, z)\}$. Dies führt zum kritischen Paar $\langle \mathsf{f}(y, z), \mathsf{f}(\mathsf{f}(\mathsf{e}, y), z)\rangle$. Dieses lässt sich aber einfach durch Anwenden der zweiten Regel zusammenführen.

c) Das erste kritische Paar bildet sich analog zu *b*) und lässt sich auch ebenso zusammenführen. Zusätzlich haben wir eine ähnliche Überlappung wie bei *b*) zwischen erster und zweiter Regel, die zu dem kritischen Paar $\langle \mathsf{f}(\mathsf{f}(x, x'), \mathsf{e}), \mathsf{f}(x, x')\rangle$ führt, welches in diesem Fall zusammenführbar ist mit $\mathsf{f}(\mathsf{f}(x, x'), \mathsf{e}) \to \mathsf{f}(x, x')$. Es liegt also ein lokal konfluentes TES vor mit dem Kritische-Paare-Lemma. Mit einer LPOS mit Status $\pi_\mathsf{f} = \langle 2, 1\rangle$ lässt sich die Terminierung von $\mathcal{R}_3$ beweisen, also liegt mit dem Diamond-Lemma auch Konfluenz vor.

d) Hier haben wir kein kritisches Paar: Wegen der Funktionssymbole könnte es allerhöchstens eine Überlappung auf Root-Ebene geben. Dort unifizieren die Regeln aber nicht, denn

$$\{x =^? \mathsf{s}^i(x'), \mathsf{s}^j(x) =^? x'\} \Longrightarrow \{x =^? \mathsf{s}^i(x'), \mathsf{s}^{i+j}(x') =^? x'\}$$

Dies führt zu einem Abbruch mittels Occur-Failure, da $i+j = 0$ wegen $i > 0$ nicht eintreten kann. Außerdem gibt es den Fall, in dem $\mathsf{gt}(x, \mathsf{s}^i(x))$ und $\mathsf{gt}(x', \mathsf{s}^j(x'))$ bzw. $\mathsf{gt}(\mathsf{s}^i(x), x)$ und $\mathsf{gt}(\mathsf{s}^j(x'), x')$ für $i \neq j$ unifiziert werden könnten. Mit den Unifikationsregeln ergeben in beiden Fällen das Unifikationsprobleme

$$\{x =^? x', \mathsf{s}^i(x') =^? \mathsf{s}^j(x')\}$$

Nach $min(i, j)$-maliger Anwendung der Termreduktion erhält man einen Occur-Failure. Damit ist $\mathcal{R}_4$ lokal konfluent nach dem Kritische-Paare-Lemma. Da es offensichtlich auch fundiert ist, haben wir mit dem Diamond-Lemma auch die Konfluenz gezeigt.

e) Keine linke Seite und auch kein Teilterm einer linken Seite unifiziert mit einer anderen linken Seite. Wir haben also keine kritischen Paare und $\mathcal{R}_5$ ist mit dem Kritische-Paare-Lemma lokal konfluent. Das TES terminiert allerdings nicht wegen

$$\mathsf{div}(\mathsf{s}(x), 0) \to \mathsf{s}(\mathsf{div}(\mathsf{minus}(\mathsf{s}(x), 0), 0)) \to \mathsf{s}(\mathsf{div}(\mathsf{s}(x), 0))$$

also ist das Diamond-Lemma nicht anwendbar. Allerdings ist das TES *orthogonal*, da wir keine kritischen Paare haben und die Gleichungen auch *linear* sind. Laut Vorlesung folgt aus der Orthogonalität aber die Konfluenz, also ist $\mathcal{R}_5$ konfluent.

f) Dieses TES hat ebenfalls keine kritischen Paare, da $\mathcal{R}_4$ und $\mathcal{R}_5$ jeweils keine kritischen Paare hatten und sich die Regeln der beiden TESe nicht überlappen. Damit ist $\mathcal{R}_6$ nach dem Kritische-Paare-Lemma lokal konfluent. Das TES ist aber *nicht* konfluent, wie folgendes Beispiel zeigt:

$$\begin{tikzcd}
 & \mathsf{gt}(\mathsf{div}(\mathsf{s}(x), 0), \mathsf{div}(\mathsf{s}(x), 0)) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\mathsf{false} & & \mathsf{gt}(\mathsf{s}(\mathsf{div}(\mathsf{minus}(\mathsf{s}(x), 0), 0)), \mathsf{div}(\mathsf{s}(x), 0)) \arrow[d] \\
 & & \mathsf{gt}(\mathsf{s}(\mathsf{div}(\mathsf{s}(x), 0)), \mathsf{div}(\mathsf{s}(x), 0)) \arrow[d] \\
 & & \mathsf{true}
\end{tikzcd}$$