## Exercise 1 (Advanced Completion Algorithm): (3 points)

Please use the advanced completion algorithm from the lecture to generate a convergent TRS of **just three rules** that is equivalent to the following set of equations:

$$\{\mathsf{f}(\mathsf{f}(x)) \equiv \mathsf{h}(x), \mathsf{f}(\mathsf{g}(x)) \equiv \mathsf{f}(x), \mathsf{f}(x) \equiv \mathsf{g}(x)\}$$

Write down the single steps of the algorithm using the following notation and indicate which transformation rule you apply to which term equation or rewrite rule:

$$\begin{array}{c} \mathcal{E}_1, \mathcal{R}_1 \\ \hline \mathcal{E}_2, \mathcal{R}_2 \\ \hline \mathcal{E}_3, \mathcal{R}_3 \\ \hline \dots \end{array}$$

As reduction order $\succ$, use the LPO with precedence $\mathsf{f} \sqsupset \mathsf{h} \sqsupset \mathsf{g}$. In this exercise you do not need to give a proof for $s \succ t$ if you generate a new rule $s \to t$ (but this statement should be true, of course).

## Solution:

$$\begin{array}{cl}
\{\mathsf{f}(\mathsf{f}(x)) \equiv \mathsf{h}(x), \mathsf{f}(\mathsf{g}(x)) \equiv \mathsf{f}(x), \mathsf{f}(x) \equiv \mathsf{g}(x)\}, \emptyset & \\ \hline
\{\mathsf{f}(\mathsf{f}(x)) \equiv \mathsf{h}(x), \mathsf{f}(\mathsf{g}(x)) \equiv \mathsf{f}(x)\}, \{\mathsf{f}(x) \to \mathsf{g}(x)\} & 1 \\ \hline
\{\mathsf{g}(\mathsf{g}(x)) \equiv \mathsf{h}(x), \mathsf{g}(\mathsf{g}(x)) \equiv \mathsf{g}(x)\}, \{\mathsf{f}(x) \to \mathsf{g}(x)\} & 2 \\ \hline
\{\mathsf{g}(\mathsf{g}(x)) \equiv \mathsf{h}(x)\}, \{\mathsf{f}(x) \to \mathsf{g}(x), \mathsf{g}(\mathsf{g}(x)) \to \mathsf{g}(x)\} & 3 \\ \hline
\{\mathsf{g}(x) \equiv \mathsf{h}(x)\}, \{\mathsf{f}(x) \to \mathsf{g}(x), \mathsf{g}(\mathsf{g}(x)) \to \mathsf{g}(x)\} & 4 \\ \hline
\emptyset, \{\mathsf{h}(x) \to \mathsf{g}(x), \mathsf{f}(x) \to \mathsf{g}(x), \mathsf{g}(\mathsf{g}(x)) \to \mathsf{g}(x)\} & 5 \\ \hline
\{\mathsf{g}(x) \equiv \mathsf{g}(x)\}, \{\mathsf{h}(x) \to \mathsf{g}(x), \mathsf{f}(x) \to \mathsf{g}(x), \mathsf{g}(\mathsf{g}(x)) \to \mathsf{g}(x)\} & 6 \\ \hline
\emptyset, \{\mathsf{h}(x) \to \mathsf{g}(x), \mathsf{f}(x) \to \mathsf{g}(x), \mathsf{g}(\mathsf{g}(x)) \to \mathsf{g}(x)\} & 7
\end{array}$$

Step 1: **Orient** term equation $\mathsf{f}(x) \equiv \mathsf{g}(x)$, resulting in $\mathsf{f}(x) \to \mathsf{g}(x)$.
Step 2: **Reduce** all **equations** by replacing all occurrences of $\mathsf{f}(x)$ by $\mathsf{g}(x)$ (4 substeps).
Step 3: **Orient** term equation $\mathsf{g}(\mathsf{g}(x)) \equiv \mathsf{g}(x)$, resulting in $\mathsf{g}(\mathsf{g}(x)) \to \mathsf{g}(x)$.
Step 4: **Reduce** all **equations** by replacing all occurrences of $\mathsf{g}(\mathsf{g}(x))$ by $\mathsf{g}(x)$ (1 substep).
Step 5: **Orient** term equation $\mathsf{g}(x) \equiv \mathsf{h}(x)$, resulting in $\mathsf{h}(x) \to \mathsf{g}(x)$.
Step 6: **Generate** critical pair for overlap of $\mathsf{g}(\mathsf{g}(x)) \to \mathsf{g}(x)$ with itself.
Step 7: **Delete** equation $\mathsf{g}(x) \equiv \mathsf{g}(x)$.

After Step 7, all critical pairs of the persistent rules have been considered, and there are no remaining equations. Thus, $\{\mathsf{h}(x) \to \mathsf{g}(x), \mathsf{f}(x) \to \mathsf{g}(x), \mathsf{g}(\mathsf{g}(x)) \to \mathsf{g}(x)\}$ is a convergent TRS which is equivalent to the equation set from which we started.

## Exercise 2 (Advanced Completion Algorithm): (10 points)

Please use the advanced completion algorithm from the lecture to generate a convergent TRS of **at most five rules** that is equivalent to the following set of equations:

$$\{\mathsf{plus}(\mathcal{O}, y) \equiv y, \mathsf{plus}(\mathsf{s}(x), y) \equiv \mathsf{s}(\mathsf{plus}(x, y)), \mathsf{p}(\mathsf{s}(x)) \equiv x, \mathsf{s}(\mathsf{p}(x)) \equiv x\}$$

Use the same notation as in Exercise 1. As reduction order $\succ$, use the LPO with precedence $\mathsf{plus} \sqsupset \mathsf{s} \sqsupset \mathsf{p} \sqsupset \mathcal{O}$. In this exercise you do not need to give a proof for $s \succ t$ if you generate a new rule $s \to t$ (but this statement should be true, of course).

## Solution:

$$\{\mathsf{plus}(\mathcal{O},y) \equiv y, \mathsf{plus}(\mathsf{s}(x),y) \equiv \mathsf{s}(\mathsf{plus}(x,y)), \mathsf{p}(\mathsf{s}(x)) \equiv x, \mathsf{s}(\mathsf{p}(x)) \equiv x\}, \emptyset$$

1

$$\{\mathsf{plus}(\mathcal{O},y) \equiv y, \mathsf{plus}(\mathsf{s}(x),y) \equiv \mathsf{s}(\mathsf{plus}(x,y)), \mathsf{p}(\mathsf{s}(x)) \equiv x\}, \{\mathsf{s}(\mathsf{p}(x)) \to x\}$$

2

$$\{\mathsf{plus}(\mathcal{O},y) \equiv y, \mathsf{plus}(\mathsf{s}(x),y) \equiv \mathsf{s}(\mathsf{plus}(x,y))\}, \{\mathsf{p}(\mathsf{s}(x)) \to x, \mathsf{s}(\mathsf{p}(x)) \to x\}$$

3

$$\{\mathsf{plus}(\mathcal{O},y) \equiv y, \mathsf{plus}(\mathsf{s}(x),y) \equiv \mathsf{s}(\mathsf{plus}(x,y)), \mathsf{p}(x) \equiv \mathsf{p}(x), \mathsf{s}(x) \equiv \mathsf{s}(x)\}, \{\mathsf{p}(\mathsf{s}(x)) \to x, \mathsf{s}(\mathsf{p}(x)) \to x\}$$

4

$$\{\mathsf{plus}(\mathcal{O},y) \equiv y, \mathsf{plus}(\mathsf{s}(x),y) \equiv \mathsf{s}(\mathsf{plus}(x,y))\}, \{\mathsf{p}(\mathsf{s}(x)) \to x, \mathsf{s}(\mathsf{p}(x)) \to x\}$$

5

$$\{\mathsf{plus}(\mathcal{O},y) \equiv y\}, \{\mathsf{plus}(\mathsf{s}(x),y) \to \mathsf{s}(\mathsf{plus}(x,y)), \mathsf{p}(\mathsf{s}(x)) \to x, \mathsf{s}(\mathsf{p}(x)) \to x\}$$

6

$$\{\mathsf{plus}(\mathcal{O},y) \equiv y, \mathsf{s}(\mathsf{plus}(\mathsf{p}(x),y)) \equiv \mathsf{plus}(x,y)\}, \{\mathsf{plus}(\mathsf{s}(x),y) \to \mathsf{s}(\mathsf{plus}(x,y)), \mathsf{p}(\mathsf{s}(x)) \to x, \mathsf{s}(\mathsf{p}(x)) \to x\}$$

7

$$\{\mathsf{plus}(\mathcal{O},y) \equiv y\}, \{\mathsf{s}(\mathsf{plus}(\mathsf{p}(x),y)) \to \mathsf{plus}(x,y), \mathsf{plus}(\mathsf{s}(x),y) \to \mathsf{s}(\mathsf{plus}(x,y)), \mathsf{p}(\mathsf{s}(x)) \to x, \mathsf{s}(\mathsf{p}(x)) \to x\}$$

8

$$\{\mathsf{plus}(\mathcal{O},y) \equiv y, \mathsf{plus}(\mathsf{p}(x),y) \equiv \mathsf{p}(\mathsf{plus}(x,y))\}, \{\mathsf{s}(\mathsf{plus}(\mathsf{p}(x),y)) \to \mathsf{plus}(x,y), \mathsf{plus}(\mathsf{s}(x),y) \to \mathsf{s}(\mathsf{plus}(x,y)), \mathsf{p}(\mathsf{s}(x)) \to x, \mathsf{s}(\mathsf{p}(x)) \to x\}$$

9

$$\{\mathsf{plus}(\mathcal{O},y) \equiv y\}, \{\mathsf{plus}(\mathsf{p}(x),y) \to \mathsf{p}(\mathsf{plus}(x,y)), \mathsf{s}(\mathsf{plus}(\mathsf{p}(x),y)) \to \mathsf{plus}(x,y), \mathsf{plus}(\mathsf{s}(x),y) \to \mathsf{s}(\mathsf{plus}(x,y)), \mathsf{p}(\mathsf{s}(x)) \to x, \mathsf{s}(\mathsf{p}(x)) \to x\}$$

10

$$\{\mathsf{plus}(\mathcal{O},y) \equiv y, \mathsf{s}(\mathsf{p}(\mathsf{plus}(x,y))) \equiv \mathsf{plus}(x,y)\}, \{\mathsf{plus}(\mathsf{p}(x),y) \to \mathsf{p}(\mathsf{plus}(x,y)), \mathsf{plus}(\mathsf{s}(x),y) \to \mathsf{s}(\mathsf{plus}(x,y)), \mathsf{p}(\mathsf{s}(x)) \to x, \mathsf{s}(\mathsf{p}(x)) \to x\}$$

11

$$\{\mathsf{plus}(\mathcal{O},y) \equiv y, \mathsf{plus}(x,y) \equiv \mathsf{plus}(x,y)\}, \{\mathsf{plus}(\mathsf{p}(x),y) \to \mathsf{p}(\mathsf{plus}(x,y)), \mathsf{plus}(\mathsf{s}(x),y) \to \mathsf{s}(\mathsf{plus}(x,y)), \mathsf{p}(\mathsf{s}(x)) \to x, \mathsf{s}(\mathsf{p}(x)) \to x\}$$

12

$$\{\mathsf{plus}(\mathcal{O},y) \equiv y\}, \{\mathsf{plus}(\mathsf{p}(x),y) \to \mathsf{p}(\mathsf{plus}(x,y)), \mathsf{plus}(\mathsf{s}(x),y) \to \mathsf{s}(\mathsf{plus}(x,y)), \mathsf{p}(\mathsf{s}(x)) \to x, \mathsf{s}(\mathsf{p}(x)) \to x\}$$

13

$$\{\mathsf{plus}(\mathcal{O},y) \equiv y, \mathsf{p}(\mathsf{plus}(\mathsf{s}(x),y)) \equiv \mathsf{plus}(x,y)\}, \{\mathsf{plus}(\mathsf{p}(x),y) \to \mathsf{p}(\mathsf{plus}(x,y)), \mathsf{plus}(\mathsf{s}(x),y) \to \mathsf{s}(\mathsf{plus}(x,y)), \mathsf{p}(\mathsf{s}(x)) \to x, \mathsf{s}(\mathsf{p}(x)) \to x\}$$

14

$$\{\mathsf{plus}(\mathcal{O},y) \equiv y, \mathsf{p}(\mathsf{s}(\mathsf{plus}(x,y))) \equiv \mathsf{plus}(x,y)\}, \{\mathsf{plus}(\mathsf{p}(x),y) \to \mathsf{p}(\mathsf{plus}(x,y)), \mathsf{plus}(\mathsf{s}(x),y) \to \mathsf{s}(\mathsf{plus}(x,y)), \mathsf{p}(\mathsf{s}(x)) \to x, \mathsf{s}(\mathsf{p}(x)) \to x\}$$

15

$$\{\mathsf{plus}(\mathcal{O},y) \equiv y, \mathsf{plus}(x,y) \equiv \mathsf{plus}(x,y)\}, \{\mathsf{plus}(\mathsf{p}(x),y) \to \mathsf{p}(\mathsf{plus}(x,y)), \mathsf{plus}(\mathsf{s}(x),y) \to \mathsf{s}(\mathsf{plus}(x,y)), \mathsf{p}(\mathsf{s}(x)) \to x, \mathsf{s}(\mathsf{p}(x)) \to x\}$$

16

$$\{\mathsf{plus}(\mathcal{O},y) \equiv y\}, \{\mathsf{plus}(\mathsf{p}(x),y) \to \mathsf{p}(\mathsf{plus}(x,y)), \mathsf{plus}(\mathsf{s}(x),y) \to \mathsf{s}(\mathsf{plus}(x,y)), \mathsf{p}(\mathsf{s}(x)) \to x, \mathsf{s}(\mathsf{p}(x)) \to x\}$$

17

$$\emptyset, \{\mathsf{plus}(\mathcal{O},y) \to y, \mathsf{plus}(\mathsf{p}(x),y) \to \mathsf{p}(\mathsf{plus}(x,y)), \mathsf{plus}(\mathsf{s}(x),y) \to \mathsf{s}(\mathsf{plus}(x,y)), \mathsf{p}(\mathsf{s}(x)) \to x, \mathsf{s}(\mathsf{p}(x)) \to x\}$$

Step 1: **Orient** term equation $\mathsf{s}(\mathsf{p}(x)) \equiv x$, resulting in $\mathsf{s}(\mathsf{p}(x)) \to x$.
Step 2: **Orient** term equation $\mathsf{p}(\mathsf{s}(x)) \equiv x$, resulting in $\mathsf{p}(\mathsf{s}(x)) \to x$.
Step 3: **Generate** equations $\mathsf{p}(x) \equiv \mathsf{p}(x)$ and $\mathsf{s}(x) \equiv \mathsf{s}(x)$ for critical pairs of $\mathsf{s}(\mathsf{p}(x)) \to x$ and $\mathsf{p}(\mathsf{s}(x)) \to x$ (2 substeps).
Step 4: **Delete** equations $\mathsf{p}(x) \equiv \mathsf{p}(x)$ and $\mathsf{s}(x) \equiv \mathsf{s}(x)$ (2 substeps).
Step 5: **Orient** term equation $\mathsf{plus}(\mathsf{s}(x),y) \equiv \mathsf{s}(\mathsf{plus}(x,y))$, resulting in $\mathsf{plus}(\mathsf{s}(x),y) \to \mathsf{s}(\mathsf{plus}(x,y))$.
Step 6: **Generate** equation $\mathsf{s}(\mathsf{plus}(\mathsf{p}(x),y)) \equiv \mathsf{plus}(x,y)$ for critical pair of $\mathsf{plus}(\mathsf{s}(x),y) \to \mathsf{s}(\mathsf{plus}(x,y))$ and $\mathsf{s}(\mathsf{p}(x)) \to x$.
Step 7: **Orient** term equation $\mathsf{s}(\mathsf{plus}(\mathsf{p}(x),y)) \equiv \mathsf{plus}(x,y)$, resulting in $\mathsf{s}(\mathsf{plus}(\mathsf{p}(x),y)) \to \mathsf{plus}(x,y)$.
Step 8: **Generate** equation $\mathsf{plus}(\mathsf{p}(x),y) \equiv \mathsf{p}(\mathsf{plus}(x,y))$ for one of the critical pairs of $\mathsf{p}(\mathsf{s}(x)) \to x$ and $\mathsf{s}(\mathsf{plus}(\mathsf{p}(x),y)) \to \mathsf{plus}(x,y)$.

Step 9: **Orient** term equation $\mathsf{plus}(\mathsf{p}(x), y) \equiv \mathsf{p}(\mathsf{plus}(x, y))$, resulting in $\mathsf{plus}(\mathsf{p}(x), y) \equiv \mathsf{p}(\mathsf{plus}(x, y))$.
Step 10: **Reduce** the **left**-hand side of the rule $\mathsf{s}(\mathsf{plus}(\mathsf{p}(x), y)) \to \mathsf{plus}(x, y)$ using the rule $\mathsf{plus}(\mathsf{p}(x), y) \to \mathsf{p}(\mathsf{plus}(x, y))$, resulting in the equation $\mathsf{s}(\mathsf{p}(\mathsf{plus}(x, y))) \equiv \mathsf{plus}(x, y)$.
Step 11: **Reduce** the left-hand side of the equation $\mathsf{s}(\mathsf{p}(\mathsf{plus}(x, y))) \equiv \mathsf{plus}(x, y)$ using the rule $\mathsf{s}(\mathsf{p}(x)) \to x$, resulting in the equation $\mathsf{plus}(x, y) \equiv \mathsf{plus}(x, y)$.
Step 12: **Delete** the equation $\mathsf{plus}(x, y) \equiv \mathsf{plus}(x, y)$.
Step 13: **Generate** equation $\mathsf{p}(\mathsf{plus}(\mathsf{s}(x), y) \equiv \mathsf{plus}(x, y))$ for the critical pair of $\mathsf{s}(\mathsf{p}(x)) \to x$ and $\mathsf{plus}(\mathsf{s}(x), y) \to \mathsf{s}(\mathsf{plus}(x, y))$.
Step 14: **Reduce** the left-hand side of the equation $\mathsf{p}(\mathsf{plus}(\mathsf{s}(x), y)) \to \mathsf{plus}(x, y)$ using the rule $\mathsf{plus}(\mathsf{s}(x), y) \to \mathsf{s}(\mathsf{plus}(x, y))$, resulting in the equation $\mathsf{p}(\mathsf{s}(\mathsf{plus}(x, y))) \equiv \mathsf{plus}(x, y)$.
Step 15: **Reduce** the left-hand side of the equation $\mathsf{p}(\mathsf{s}(\mathsf{plus}(x, y))) \equiv \mathsf{plus}(x, y)$ using the rule $\mathsf{p}(\mathsf{s}(x)) \to x$, resulting in the equation $\mathsf{plus}(x, y) \equiv \mathsf{plus}(x, y)$.
Step 16: **Delete** the equation $\mathsf{plus}(x, y) \equiv \mathsf{plus}(x, y)$.
Step 17: **Orient** term equation $\mathsf{plus}(\mathcal{O}, y) \equiv y$, resulting in $\mathsf{plus}(\mathcal{O}, y) \to y$.

After Step 17, all critical pairs of the persistent rules have been considered,[1] and there are no remaining equations. Thus, $\{\mathsf{plus}(\mathcal{O}, y) \to y, \mathsf{plus}(\mathsf{p}(x), y) \to \mathsf{p}(\mathsf{plus}(x, y)), \mathsf{plus}(\mathsf{s}(x), y) \to \mathsf{s}(\mathsf{plus}(x, y)), \mathsf{s}(\mathsf{p}(x)) \to x, \mathsf{p}(\mathsf{s}(x)) \to x\}$ is a convergent TRS which is equivalent to the equation set from which we started.

[1] Note that we have not generated an equation for the critical pair $\langle \mathsf{plus}(\mathsf{s}(x), y), \mathsf{s}(\mathsf{plus}(x, y)) \rangle$ that arises from the rules $\mathsf{s}(\mathsf{plus}(\mathsf{p}(x), y)) \to \mathsf{plus}(x, y)$ and $\mathsf{p}(\mathsf{s}(x)) \to x$. Nonetheless, our transformation sequence is a *fair* sequence because the rule $\mathsf{s}(\mathsf{plus}(\mathsf{p}(x), y)) \to \mathsf{plus}(x, y)$ is not persistent.