$\mathcal{E} = \{\mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{f}(x))) \equiv \mathsf{f}(\mathsf{g}(x)), \mathsf{g}(\mathsf{g}(x)) \equiv \mathsf{g}(x)\}$

"Orient"

$(\varnothing, \{\mathsf{fgf}(x) \to \mathsf{fg}(x), \mathsf{g}^2(x) \to \mathsf{g}(x)\})$

"Generate"
"Reduce Equation"
"Orient"

$$\begin{tikzcd}
 & \mathsf{fgfgf}(x) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\mathsf{fg^2f}(x) \arrow[d] & & \mathsf{fgfg}(x) \arrow[d] \\
\mathsf{fgf}(x) & & \mathsf{fg^2}(x)
\end{tikzcd}$$

$(\varnothing, \{\mathsf{fgf}(x) \to \mathsf{fg}(x), \mathsf{fgf}(x) \to \mathsf{fg}^2(x), \mathsf{g}^2(x) \to \mathsf{g}(x)\})$

"Reduce Left" without restrictions

$(\{\mathsf{fg}^2(x) \equiv \mathsf{fg}(x)\}, \{\mathsf{fgf}(x) \to \mathsf{fg}^2(x), \mathsf{g}^2(x) \to \mathsf{g}(x)\})$

"Reduce Equation" & "Delete"

$(\varnothing, \{\mathsf{fgf}(x) \to \mathsf{fg}^2(x), \mathsf{g}^2(x) \to \mathsf{g}(x)\})$

$(\varnothing, \{\mathsf{fgf}(x) \to \mathsf{fg}^{2^n}(x), \mathsf{g}^2(x) \to \mathsf{g}(x)\})$

"Generate"
"Reduce Equation"
"Orient"

$$\begin{tikzcd}
 & \mathsf{fgfgf}(x) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\mathsf{fg}^{2^n+1}\mathsf{f}(x) \arrow[d, "*"] & & \mathsf{fgfg}^{2^n}(x) \arrow[d] \\
\mathsf{fgf}(x) & & \mathsf{fg}^{2^n}\mathsf{g}^{2^n}(x) = \mathsf{fg}^{2^{n+1}}(x)
\end{tikzcd}$$

$(\varnothing, \{\mathsf{fgf}(x) \to \mathsf{fg}^{2^n}(x), \mathsf{fgf}(x) \to \mathsf{fg}^{2^{n+1}}(x), \mathsf{g}^2(x) \to \mathsf{g}(x)\})$

"Reduce Left" without restrictions

$(\{\mathsf{fg}^{2^{n+1}}(x) \equiv \mathsf{fg}^{2^n}(x)\}, \{\mathsf{fgf}(x) \to \mathsf{fg}^{2^{n+1}}(x), \mathsf{g}^2(x) \to \mathsf{g}(x)\})$

"Reduce Equation" & "Delete"

$(\varnothing, \{\mathsf{fgf}(x) \to \mathsf{fg}^{2^{n+1}}(x), \mathsf{g}^2(x) \to \mathsf{g}(x)\})$

$\mathcal{E}_\omega = \varnothing, \quad \mathcal{R}_\omega = \{\mathsf{g}^2(x) \to \mathsf{g}(x)\}$ not equivalent to original $\mathcal{E}$!

Group

$$\mathcal{E} = \{\mathsf{f}(x, \mathsf{f}(y, z)) \equiv \mathsf{f}(\mathsf{f}(x, y), z), \quad \mathsf{f}(x, \mathsf{e}) \equiv x, \quad \mathsf{f}(x, \mathsf{i}(x)) \equiv \mathsf{e}\}$$

"Orient"

$$(\varnothing, \{(G1), (G2), (G3)\}) \text{ with } \begin{array}{rcll} \mathsf{f}(x, \mathsf{f}(y, z)) & \rightarrow & \mathsf{f}(\mathsf{f}(x, y), z) & (G1) \\ \mathsf{f}(x, \mathsf{e}) & \rightarrow & x & (G2) \\ \mathsf{f}(x, \mathsf{i}(x)) & \rightarrow & \mathsf{e} & (G3) \end{array}$$

"Generate"
"Reduce Equation"
"Orient"

$$\begin{tikzcd}
 & \mathsf{f}(x, \underline{\mathsf{f}(y, \mathsf{i}(y))}) \arrow[dl, "(G1)"'] \arrow[dr, "(G3)"] & \\
\mathsf{f}(\mathsf{f}(x, y), \mathsf{i}(y)) & & \mathsf{f}(x, \mathsf{e}) \arrow[d, "(G2)"] \\
 & & x
\end{tikzcd}$$

$$(\varnothing, \{(G1), (G2), (G3), (G4)\}) \text{ with } \mathsf{f}(\mathsf{f}(x, y), \mathsf{i}(y)) \rightarrow x \quad (G4)$$

$$\mathsf{f}(x, \mathsf{f}(y, z)) \rightarrow \mathsf{f}(\mathsf{f}(x, y), z) \quad (G1)$$
$$\mathsf{f}(x, \mathsf{e}) \rightarrow x \quad (G2)$$
$$\mathsf{f}(x, \mathsf{i}(x)) \rightarrow \mathsf{e} \quad (G3)$$
$$\mathsf{f}(\mathsf{f}(x, y), \mathsf{i}(y)) \rightarrow x \quad (G4)$$

$$\begin{tikzcd}
 & \mathsf{f}(\underline{\mathsf{f}(x, \mathsf{e})}, \mathsf{i}(\mathsf{e})) \arrow[dl, "(G4)"'] \arrow[dr, "(G2)"] & \\
x & & \mathsf{f}(x, \mathsf{i}(\mathsf{e}))
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
 & \mathsf{f}(\underline{\mathsf{f}(x, \mathsf{i}(\mathsf{e}))}, \mathsf{i}(\mathsf{i}(\mathsf{e}))) \arrow[dl, "(G4)"'] \arrow[dr, "(G5)"] & \\
x & & \mathsf{f}(x, \mathsf{i}(\mathsf{i}(\mathsf{e})))
\end{tikzcd}$$

$$\mathsf{f}(x, \mathsf{i}(\mathsf{e})) \rightarrow x \quad (G5)$$

$$\mathsf{f}(x, \mathsf{i}(\mathsf{i}(\mathsf{e}))) \rightarrow x \quad (G6)$$

$$\begin{tikzcd}
 & \mathsf{f}(\mathsf{i}(\mathsf{e}), \mathsf{i}(\mathsf{i}(\mathsf{e}))) \arrow[dl, "(G3)"'] \arrow[dr, "(G6)"] & \\
\mathsf{e} & & \mathsf{i}(\mathsf{e})
\end{tikzcd}$$

Delete $(G5)$ and $(G6)$!

$$\mathsf{i}(\mathsf{e}) \rightarrow \mathsf{e} \quad (G7)$$

$$\begin{aligned} \mathsf{f}(x,\mathsf{f}(y,z)) &\to \mathsf{f}(\mathsf{f}(x,y),z) && (G1) \\ \mathsf{f}(x,\mathsf{e}) &\to x && (G2) \\ \mathsf{f}(x,\mathsf{i}(x)) &\to \mathsf{e} && (G3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathsf{f}(\mathsf{f}(x,y),\mathsf{i}(y)) &\to x && (G4) \\ \mathsf{i}(\mathsf{e}) &\to \mathsf{e} && (G7) \end{aligned}$$

$$\begin{tikzcd} & \mathsf{f}(\underline{\mathsf{f}(x,\mathsf{i}(x))},\mathsf{i}(\mathsf{i}(x))) \arrow[dl, "(G4)"'] \arrow[dr, "(G3)"] & \\ x & & \mathsf{f}(\mathsf{e},\mathsf{i}(\mathsf{i}(x))) \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} & \mathsf{f}(x,\underline{\mathsf{f}(\mathsf{e},\mathsf{i}(\mathsf{i}(y)))}) \arrow[dl, "(G1)"'] \arrow[dr, "(G8)"] & \\ \mathsf{f}(\mathsf{f}(x,\mathsf{e}),\mathsf{i}(\mathsf{i}(y))) \arrow[d, "(G2)"] & & \mathsf{f}(x,y) \\ \mathsf{f}(x,\mathsf{i}(\mathsf{i}(y))) & & \end{tikzcd}$$

$$\mathsf{f}(\mathsf{e},\mathsf{i}(\mathsf{i}(x))) \to x \quad (G8)$$

$$\mathsf{f}(x,\mathsf{i}(\mathsf{i}(y))) \to \mathsf{f}(x,y) \quad (G9)$$

"Reduce Left" and "Orient" transform $(G8)$ into

$$\mathsf{f}(\mathsf{e},x) \to x \quad (G10)$$

$$
\begin{aligned}
\mathsf{f}(x,\mathsf{f}(y,z)) &\to \mathsf{f}(\mathsf{f}(x,y),z) && (G1)\\
\mathsf{f}(x,\mathsf{e}) &\to x && (G2)\\
\mathsf{f}(x,\mathsf{i}(x)) &\to \mathsf{e} && (G3)\\
\mathsf{f}(\mathsf{f}(x,y),\mathsf{i}(y)) &\to x && (G4)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathsf{i}(\mathsf{e}) &\to \mathsf{e} && (G7)\\
\mathsf{f}(x,\mathsf{i}(\mathsf{i}(y))) &\to \mathsf{f}(x,y) && (G9)\\
\mathsf{f}(\mathsf{e},x) &\to x && (G10)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathsf{f}(\mathsf{e},\mathsf{i}(\mathsf{i}(x))) \arrow[dl, "(G9)"'] \arrow[dr, "(G10)"] & \\
\mathsf{f}(\mathsf{e},x) \arrow[d, "(G10)"] & & \mathsf{i}(\mathsf{i}(x)) \\
x & &
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathsf{f}(\mathsf{i}(x),\underline{\mathsf{i}(\mathsf{i}(x))}) \arrow[dl, "(G3)"'] \arrow[dr, "(G11)"] & \\
\mathsf{e} & & \mathsf{f}(\mathsf{i}(x),x)
\end{tikzcd}
$$

$$\mathsf{i}(\mathsf{i}(x)) \to x \quad (G11)$$

$$\mathsf{f}(\mathsf{i}(x),x) \to \mathsf{e} \quad (G12)$$

Delete $(G9)$!

$$\mathsf{f}(x,\mathsf{f}(y,z)) \to \mathsf{f}(\mathsf{f}(x,y),z) \quad (G1)$$
$$\mathsf{f}(x,\mathsf{e}) \to x \quad (G2)$$
$$\mathsf{f}(x,\mathsf{i}(x)) \to \mathsf{e} \quad (G3)$$
$$\mathsf{f}(\mathsf{f}(x,y),\mathsf{i}(y)) \to x \quad (G4)$$

$$\mathsf{i}(\mathsf{e}) \to \mathsf{e} \quad (G7)$$
$$\mathsf{f}(\mathsf{e},x) \to x \quad (G10)$$
$$\mathsf{i}(\mathsf{i}(x)) \to x \quad (G11)$$
$$\mathsf{f}(\mathsf{i}(x),x) \to \mathsf{e} \quad (G12)$$

$$\begin{tikzcd}
 & \mathsf{f}(x,\underline{\mathsf{f}(\mathsf{i}(y),y)}) \arrow[dl, "(G1)"'] \arrow[dr, "(G12)"] & \\
\mathsf{f}(\mathsf{f}(x,\mathsf{i}(y)),y) & & \mathsf{f}(x,\mathsf{e}) \arrow[d, "(G2)"'] \\
 & & x
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
 & \mathsf{f}(\mathsf{i}(\mathsf{f}(x,y)),\mathsf{f}(x,y)) \arrow[dl, "(G1)"'] \arrow[dr, "(G12)"] & \\
\mathsf{f}(\mathsf{f}(\mathsf{i}(\mathsf{f}(x,y)),x),y) & & \mathsf{e}
\end{tikzcd}$$

$$\mathsf{f}(\mathsf{f}(x,\mathsf{i}(y)),y) \to x \quad (G13)$$

$$\mathsf{f}(\mathsf{f}(\mathsf{i}(\mathsf{f}(x,y)),x),y) \to \mathsf{e} \quad (G14)$$

$$\begin{tikzcd}
 & \mathsf{f}(\underline{\mathsf{f}(\mathsf{f}(\mathsf{i}(\mathsf{f}(x,y)),x),y)},\mathsf{i}(y)) \arrow[dl, "(G4)"'] \arrow[dr, "(G14)"] & \\
\mathsf{f}(\mathsf{i}(\mathsf{f}(x,y)),x) & & \mathsf{f}(\mathsf{e},\mathsf{i}(y)) \arrow[d, "(G10)"'] \\
 & & \mathsf{i}(y)
\end{tikzcd}$$

$$\mathsf{f}(\mathsf{i}(\mathsf{f}(x,y)),x) \to \mathsf{i}(y) \quad (G15)$$

Delete $(G14)$!

$$
\begin{array}{rcll}
\mathsf{f}(x,\mathsf{f}(y,z)) & \to & \mathsf{f}(\mathsf{f}(x,y),z) & (G1) \\
\mathsf{f}(x,\mathsf{e}) & \to & x & (G2) \\
\mathsf{f}(x,\mathsf{i}(x)) & \to & \mathsf{e} & (G3) \\
\mathsf{f}(\mathsf{f}(x,y),\mathsf{i}(y)) & \to & x & (G4) \\
\mathsf{i}(\mathsf{e}) & \to & \mathsf{e} & (G7)
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rcll}
\mathsf{f}(\mathsf{e},x) & \to & x & (G10) \\
\mathsf{i}(\mathsf{i}(x)) & \to & x & (G11) \\
\mathsf{f}(\mathsf{i}(x),x) & \to & \mathsf{e} & (G12) \\
\mathsf{f}(\mathsf{f}(x,\mathsf{i}(y)),y) & \to & x & (G13) \\
\mathsf{f}(\mathsf{i}(\mathsf{f}(x,y)),x) & \to & \mathsf{i}(y) & (G15)
\end{array}
$$

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathsf{f}(\underline{\mathsf{f}(\mathsf{i}(\mathsf{f}(x,y)),x)},\mathsf{i}(x)) \arrow[dl, "(G4)"'] \arrow[dr, "(G15)"] & \\
\mathsf{i}(\mathsf{f}(x,y)) & & \mathsf{f}(\mathsf{i}(y),\mathsf{i}(x))
\end{tikzcd}
$$

$$
\mathsf{i}(\mathsf{f}(x,y)) \to \mathsf{f}(\mathsf{i}(y),\mathsf{i}(x)) \quad (G16)
$$

Delete $(G15)$!

Convergent TRS which is equivalent to $\mathcal{E}$:

$\{(G1)-(G4),(G7),(G10)-(G13),(G16)\}$